Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Grenoble

Exercice 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 = -1$ où z est l'inconnue.
2. Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

Exercice 2 **4 points**

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \text{Log}\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.
2. **a.** Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Calculer l'aire géométrique $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. (On pourra intégrer par parties).

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0} \mathscr{A}(\lambda)$.

Problème **12 points**

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On désigne par $\mathscr{L}(\text{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E. On notera Id l'application identique de E, θ l'application nulle de E.
Pour tout élément φ de $\mathscr{L}(\text{E})$ on pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi + \varphi = 2\varphi$.

Partie A

On étudie dans cette partie les éléments φ de $\mathscr{L}(\text{E})$ tels que

$$(1) \qquad (\varphi - \text{Id})^2 = \theta.$$

1. Montrer que $(\varphi - \text{Id})^2 = \theta$ équivaut à $2\varphi - \varphi^2 = \text{Id}$. En déduire que si φ est solution de (1) alors φ est bijectif et préciser φ^{-1}.
2. **a.** Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1) ?

   b. Soit $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base de E, φ_1 et φ_2 les endomorphismes de matrices respectives

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que φ_1 et φ_2 sont solutions de (1).
   En déduire qu'il existe un élément Ψ de $\mathscr{L}(\text{E})$ tel que $\Psi \neq \theta$ et $\Psi^2 = \theta$.
3. Soit φ une solution de (1) et λ un réel : démontrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul tel que $\varphi\left(\overrightarrow{U}\right) = \lambda \overrightarrow{U}$ si, et seulement si, $\lambda = 1$.
4. **a.** Soit Ψ un élément de $\mathscr{L}(\text{E})$ différent de θ tel que $\Psi^2 = \theta$.
   Soit $\overrightarrow{U_0}$ un vecteur de E tel que $\overrightarrow{U_0} \neq \theta$: montrer que $(\Psi(U_0), U_0)$ est une base de E. Donner la matrice de Ψ dans cette base.

b. En déduire que, pour φ solution de (1) et $\varphi \neq$ Id, il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Soit φ une solution de (1) autre que l'identité.
On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par φ et Id.

a. Démontrer que la dimension de F est 2.

b. Démontrer que F muni de l'addition des applications et de la composition des applications a une structure d'anneau commutatif unitaire.
Déterminer G, l'ensemble des éléments inversibles de F.
Quelle est la structure de $(\mathrm{G}, \circ)$?

Partie B

On étudie dans cette partie les applications affines du plan affine P associé à E laissant au moins deux points distincts invariants.
On considère dans P, trois points non alignés A, B, C et C′ un point quelconque de P.
Soit f l'application affine laissant A et B invariants et transformant C en C′ et φ l'endomorphisme associé. ($f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$, $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$).

1. On suppose $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Que peut-on dire de f ? Dans la suite du problème on suppose $\mathrm{C} \neq \mathrm{C}'$.

2. Montrer que la droite AB est invariante point par point par f.

3. On suppose les droites AB et CC′ sécantes en O. Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées d'un point M de P dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

a. Calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M' = f(M)$.

b. Quelle est la nature de f si $\mathrm{C}' = \mathrm{O}$?

c. Si $\mathrm{C}' \neq \mathrm{O}$ étudier comment se transforment les droites parallèles aux axes.

4. On suppose que les droites AB et CC′ sont parallèles. Soit k tel que $\overrightarrow{\mathrm{CC}'} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

a. Dans le repère $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de M' image par f d'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
Vérifier que $(\varphi - \mathrm{Id})^2 = \theta$.

b. Démontrer que, pour tout point M de P

$$\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(y est l'ordonnée de M).
En déduire une construction géométrique de $f(M)$. (On envisagera les cas : CM est parallèle à AB, CM n'est pas parallèle à AB).