Baccalauréat C Grenoble juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Pour tout nombre complexe z, on note

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

1. **a.** Montrer que : $f(2) = 0$.

   b. Déterminer z_1, z_2, z_3 tels que : pour tout nombre complexe z

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

2. Pour tout nombre complexe z, on note :

$$f'(z) = (z - z_1)(z - z_2) + (z - z_2)(z - z_3) + (z - z_3)(z - z_1).$$

   Soient M_1, M_2, M_3 les images des nombres complexes z_1, z_2, z_3 dans le plan complexe.

   a. Soit N un point d'affixe z. Si N est différent de M_1, de M_2, de M_3 montrer que l'affixe du vecteur :

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{NM_1}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{NM_1} + \frac{1}{\left\|\overrightarrow{NM_2}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{NM_2} + \frac{1}{\left\|\overrightarrow{NM_3}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{NM_3}$$

   est le conjugué de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$;

   b. Calculer $f'(1)$. Soit N_1 le point d'affixe 1.
   Expliciter les coefficients α, β et φ réels de somme égale à 1 qui permettent d'exprimer N_1 comme barycentre des points M_1, M_2 et M_3.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

$\mathcal{E}$ est un espace, affine associé à un espace vectoriel E. On désigne par $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ un repère de $\mathcal{E}$.
Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -y + z + 3\\ y' & = & -x + z + 3\\ z' & = & -x - y + 2z + 3 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine d'équation $x + y - 2z - 3 = 0$.
   Quelle est la dimension de l'image de $\mathcal{P}$ par f. En préciser un repère cartésien.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbb{R} - \{-2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2 + x}$$

1. Pour tout x réel différent de -2, vérifier l'égalité

$$f(x) = -x+2-\frac{3}{x+2}.$$

2. Étudier les variations de f, et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (l'unité de longueur choisie étant 1 cm, figure n° 1).

3. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote oblique et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Partie B

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
-sm t

$$\varphi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}.$$

1. Pour tout t réel, montrer que $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$.
Expliquer comment l'étude des variations de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ.

2. Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet une solution, notée α, dans l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ (l'ordre des questions n'est pas imposé).

a. Montrer que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$. Quelle est l'image de $[-1\ ;\ 1]$ par f' ?

b. Soit φ' la dérivée de φ. Pour tout t réel, prouver l'égalité

$$\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t.$$

Prouver l'existence et l'unicité de α.
Calculer la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

3. a. Calculer les valeurs exactes de $\varphi(0), \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\varphi'(0)$.

b. Étudier les variations de la restriction de φ à $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
Tracer la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (l'unité de longueur choisie étant 10 cm, figure n° 2).

4. En utilisant la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \varphi(t) - t$$

prouver que l'équation $\varphi(t) = t$ admet une solution unique, notée x_0, dans $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
Montrer que x_0 est la seule solution de l'équation $\varphi(t) = t$ dans $\mathbb{R}$.
Résoudre graphiquement l'équation $\varphi(t) = t$ à l'aide de la figure n° 2.

Partie C

Soit la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi\left(u_n\right).$$

1. Pour tout n entier naturel, on considère les points M_n et N_n ayant respectivement pour coordonnées $(u_n,\ u_{n+1})$ et $(u_{n+1},\ u_{n+1})$.

Sur quelles courbes se trouvent respectivement les points M_n et N_n ? Sur la figure n° 2, placer les points

$$M_0,\ N_0,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2 \text{ et } M_3.$$

À l'aide du dessin, ranger par ordre croissant les nombres

$$u_0\,, u_1,\ u_2,\ u_3 \quad \text{et } x_0$$

2. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$$

3. Pour tout n entier naturel, prouver l'égalité

$$u_{n+1} - x_0 = \int_{x_0}^{u_n} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

a. Les nombres $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

b. On a la majoration

$$|u_{n+1} - x_0| = \frac{2}{3}\,|u_n - x_0|\,.$$

4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x_0| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - x_0|\,.$$

En déduire que la suite u converge vers x_0.