∽ Baccalauréat C groupe 3 [1] septembre 1984 ∽

EXERCICE 1

EXERCICE 3

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Pour les représentations graphiques, on adoptera pour unité de longueur 2 cm.

Partie A

1. Soit (H) l'hyperbole d'équation cartésienne

$$y^2 - 4x^2 = 4.$$

   Représenter graphiquement (H) en précisant les coordonnées de ses sommets et des équations cartésiennes de ses asymptotes.
   Déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers de (H).
2. Soient F et F′ les points de coordonnées respectives $\left(0~;~\sqrt{3}\right)$ et $\left(0~;~-\sqrt{3}\right)$
3. Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse (E) de foyers F et F′ et d'excentricité $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Représenter graphiquement (E) en précisant les coordonnées de ses sommets.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f(x) & = & -2\sqrt{1-x.|x|} & \text{pour } x \leqslant 1\\ f(x) & = & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & \text{pour } x > 1 \end{array}\right.$$

1. Vérifier que les formules précédentes définissent $f(x)$ pour tout réel x. La fonction f est-elle continue ?
2. **a.** Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty~;~0[$, $]0~;~1[$, $]1~;~+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   b. Démontrer que f est dérivable en 0 en préciser la valeur de $f'(0)$: on pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 de la fonction
   $t \longmapsto \sqrt{1+t}$ au voisinage de 0.
   c. Étudier le comportement du rapport $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. Pour $x > 1$, on pourra poser $x-1 = u$ et utiliser le développement limité d'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ au voisinage de 0 ou le comportement de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ au voisinage de 0.
3. Démontrer que la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty~;~1]$ est un sous-ensemble de $(E) \cup (H)$. ((E) et (H) étant les coniques considérées dans la partie A.)
   Étudier les variations de f et tracer la courbe (C) représentative de f.
   Préciser les tangentes à la courbe (C) aux points d'intersection avec les axes de coordonnées.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Partie C

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Tracer sur le même graphique que (C) la courbe $\left(C'\right)$ représentative de f^{-1}, fonction réciproque de f.
2. Si $x > 1$, démontrer l'égalité : $f^{-1}(x) = \dfrac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2}$.
3. Si $a \geqslant 0$, calculer $\displaystyle\int_0^a f^{-1}(x)\,\text{d}x$.

   En déduire, pour tout $t > 1$, la valeur $S(t)$ de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $x'\text{O}x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.