Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble septembre 1969

EXERCICE 1

On donne trois points, A, B et C, deux à deux distincts et non alignés, ainsi que deux nombres réels, α et β, tels que $\alpha + \beta = 0$.
On désigne par C$'$ le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs α et β et par B$'$ le barycentre des points C et A affectés des coefficients respectifs α et β.

1. Exprimer :
$\overrightarrow{\text{AC}'}$ en fonction de α, β et $\overrightarrow{\text{AB}}$,
$\overrightarrow{\text{AB}'}$ en fonction de α, β et $\overrightarrow{\text{AC}}$,
$\overrightarrow{\text{AG}}$ en fonction de $\alpha, \beta, \overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ (G désignant le centre de gravité du triangle AB$'$C$'$).
2. On considère les points B_1 et C_1 définis par les relations
$$\overrightarrow{\text{AB}_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{AC}_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}$$
Montrer que G décrit la droite B_1C_1 lorsque α et β varient de façon que $\alpha + \beta = 1$

EXERCICE 2

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

1. Comparer l'inverse et le conjugué d'un élément de U.
2. Soit z_1 et z_2 deux éléments de U tels que $z_1 z_2 \neq -1$.
Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est un nombre, réel.
3. Exprimer Z en fonction des arguments, θ_1 et θ_2, de z_1 et z_2.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$; a désigne un nombre donné strictement positif. La droite (Δ) d'équation $x = a$ coupe $x'x$ en A.
Soit $m(x\,;\,y)$ un point du plan *n'appartenant pas à* $y'y$; la droite Om coupe (Δ) en I.
On considère la transformation T dans laquelle le point m a pour image le point $M(X\,;\,Y)$ de la droite Om défini par la relation
$$\overline{\text{O}m} \cdot \overline{\text{O}M} = (\text{OI})^2.$$

Partie A

1. Déterminer les points doubles de T.
2. Déterminer des droites invariantes par T.
3. Quelle est l'image d'une parallèle à $y'y$?
4. Montrer que $X = \dfrac{a^2}{x}$ et $Y = \dfrac{a^2 y}{x^2}$.
Exprimer x et y en fonction de X, Y et a.

Partie B

On considère une droite (d) non parallèle à $y'y$ et ne passant pas par O.

1. Montrer que l'image de (d) est ;une parabole, (P), dont la tangente en O est parallèle à (d).
2. (d) et $\left(d'\right)$ étant deux droites symétriques par rapport à y'y, que peut-on dire de leurs images, (P) et (P$'$) ?

   (d) et $\left(d'\right)$ étant deux droites symétriques par rapport à O, que peut-on dire de leurs images, (P) et (P$'$) ?
3. (d) se déplaçant en restant parallèle à la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble des sommets S et l'ensemble des foyers F des paraboles (P) correspondantes.

Partie C

Soit (C) le demi-cercle de diamètre OA situé dans le demi-plan $y > 0$. On désigne par (Γ) l'image de (C) par T.

1. Déterminer l'équation, $Y = f(X)$, de (Γ).

   Étudier les variations de Y.

   Soit M_0 le point de (Γ) d'abscisse $2a$. Que peut-on dire de la droite AM_0 ? Tracer (Γ).
2. On pose $\widehat{\text{AO}m} = \alpha \quad \left(0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   Évaluer, en fonction de α, $u = tgx\text{A}M$.

   Quel est le minimum de u ? Quelles sont les positions correspondantes de m et M ?

   Évaluer tg $\widehat{M\text{A}m}$ en fonction de $t = \text{tg}\,\alpha$.