Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble septembre 1971

EXERCICE 1

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log}\,\frac{x^2-1}{x}.$$

La notation Log désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Étudier les variations de cette fonction.
3. En remarquant que $\dfrac{x^2-1}{x} = x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ chercher la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   Tracer la courbe représentative de la fonction étudiée.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E), vérifiée par la fonction y de la variable réelle x, suivante :

$$(E) \qquad y'' + 4y = 4x.$$

1. Montrer que $y = x$ est une solution particulière de (E).
2. On pose $y = x + z$. Former l'équation différentielle (E_1) à laquelle satisfait z.
   Déterminer les solutions de (E_1) et en déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant simultanément

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 3.$$

PROBLÈME

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$. On désigne par (Π) le plan (P) privé du point O, par A le point de coordonnées (2; 0). Soit T la transformation ponctuelle qui, au point M de (Π), fait correspondre le point M' défini de la façon suivante :
la similitude directe de centre O qui transforme M en A, transforme A en M'.

Partie A

1. Montrer que $\text{O}M \cdot \text{O}M' = 4$ et que

$$\left(\vec{\imath},\ \overrightarrow{\text{O}M}\right) + \left(\vec{\imath},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = 0 \pmod{2\pi}.$$

   En déduire que les affixes z de M et z' de M' sont liées par la relation $zz' = 4$.
2. Calculer les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées $(x\,;\ y)$ de M.
3. Montrer que T est une bijection involutive de (Π) sur (Π). Déterminer les points doubles de T.
4. Montrer que T est le produit commutatif de la symétrie par rapport à $x'\text{O}x$ et d'une inversion, que l'on déterminera.

Partie B

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à $\vec{\imath}$, d'une part, et à $\vec{\jmath}$, d'autre part.
2. Déterminer les points M, tels que le quadrilatère OMAM' soit un parallélogramme.
3. Soit R un point de coordonnées $(0~;~\lambda)$, où λ est un nombre réel donné.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que M, M' et R soient alignés.

Partie C

Soit (C) un cercle passant par O ; on désigne par $(a~;~b)$ les coordonnées de son centre ω, par (C') son transformé par T.

1. Quelle est la nature de (C') ? Écrire les équations de (C) et de (C').
2. Déterminer les points M, tels que (C) soit le cercle circonscrit au triangle OMM'.
   Discuter en fonction de la position de ω dans (P).

Partie D

On suppose qu'à la date t, les coordonnées de M sont données par les formules suivantes :

$$x = \dfrac{4\cos^2 t}{1+\cos^2 2t} \quad \text{et} \quad y = \dfrac{4\sin^2 t}{1+\cos^2 2t}.$$

Calculer les coordonnées de M' en fonction de t.
Déterminer la trajectoire et la loi horaire du point M'. En déduire la trajectoire de M.