

∞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1972 ∞

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien (P) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la courbe (Γ) d'équation

$$y^2 = 3x^2 - 6x - 1.$$

1. Déterminer la nature de la courbe (Γ), ses éléments de symétrie, ses asymptotes. Construire (Γ).

2. On note

z le nombre complexe de partie réelle x , de partie imaginaire y ,

$|z|$ le module de z ,

\bar{z} le complexe conjugué de z .

Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de (P) dont l'affixe z vérifie

$$|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}|z + \bar{z}|$$

EXERCICE 2

Étant donné un plan affine (P), rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f de (P) dans (P) qui, à un point M de coordonnées $(x; y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 4x + 2. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une application affine. Montrer que f est une application bijective.

Montrer que f admet un point invariant, et un seul, que l'on déterminera.

2. Démontrer qu'il existe deux droites (D_1) et (D_2) globalement invariantes par f et donner leurs équations.

PROBLÈME

Log x désigne le logarithme népérien du nombre réel positif x .

On considère la fonction numérique f , de la variable réelle, définie par

$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{Log}(x^2) - 2x, & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$.

1. Étudier la continuité de f . Montrer que f est une fonction impaire. Étudier les variations de f .

Étudier les limites de $\frac{f(x)}{x}$.

a. quand x tend vers zéro,

- b.** quand x tend vers $+\infty$.
(C) coupe $x'Ox$ en un point A d'abscisse strictement positive; établir l'équation de la tangente en A à (C).
Construire (C).
- 2.** Soit M un point de (C) d'abscisse α (α non nul).
- a.** Déterminer l'équation de la tangente (D) à (C) en M . (D) coupe $y'Oy$ en P , point que l'on précisera; en déduire un tracé simple de (D) connaissant le point de contact M .
- b.** Montrer qu'il existe, en général, sur (C) deux points M_1 et M_2 en lesquels la tangente à (C) est perpendiculaire à (D); exprimer les abscisses de M_1 et M_2 , en fonction de α .
- c.** En utilisant (C), dénombrer, suivant la valeur du paramètre réel m , les racines réelles de l'équation $x^2 = e^{2\frac{m}{x}}$.
- 3.**
- a.** En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f .
- b.** Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < e$.
Calculer l'aire $S(\lambda)$ du domaine plan limité par (C), $x'Ox$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = e$.
Déterminer la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs positives.