Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1974 Dijon ∽

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = -\sin x \cdot \text{Log}(\cos x).$$

1. Peut-on réduire son intervalle d'étude ? Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) relativement à un repère orthonormé.
2. Soit $a \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer l'aire D_a du domaine limité par la courbe (C) et les droites ayant pour équations respectives $y = 0$, $x = 0$, $x = a$ (on pourra faire une intégration par parties).

   Cette aire D_a a-t-elle une limite quand a tend vers $\frac{\pi}{2}$?

EXERCICE 2

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules noires,

1. On tire simultanément 2 boules de l'ume, Calculer la probabilité des événements suivants :

   on a tiré 2 boules rouges ;

   on a tiré 2 boules de même couleur.

   (On admettra que tous les tirages éventuels sont équiprobables).

   On exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. On répète 6 fois l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne, en remettant les boules dans l'urne après tirage (les épreuves successives sont donc indépendantes). On considère comme un succès le tirage de 2 boules rouges à une épreuve, Soit X la variable aléatoire « nombre de succès obtenus au cours des 6 épreuves ».

   Quelle est la formule donnant, en fonction de k, la probabilité de l'événement $(\text{X} = k)$, où k est un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 6$? Quels sont l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X ?

PROBLÈME

N. B. - Les trois parties sont indépendantes, sous réserve d'admettre les formules données au A.

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit β et γ deux nombres réels. À tout point $\text{A}(x\,;\,y)$, on associe les points $\text{B}(0\,;\,x)$ et $\text{C}(-y\,;\,0)$, puis le point $\text{A}'(x'\,;\,y')$, barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $1-(\beta+\gamma)$, β, γ.
On note $f_{\beta,\,\gamma}$ l'application de P dans P par laquelle A a pour image A$'$.

Partie A

Montrer que x' et y' sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& [1-(\beta+\gamma)]x-\gamma y\\ y' &=& \beta x+[1-(\beta+\gamma)]y\end{array}\right.$$

En déduire que $f_{\beta,\,\gamma}$ est une application affine admettant au moins un point invariant.

Partie B

1. Déterminer les couples $(\beta,\ \gamma)$ tels que les applications $f_{\beta,\ \gamma}$ soient des involutions.
2. Quelle est la nature géométrique de l'unique involution $f_{\beta,\ \gamma}$ telle que β soit strictement supérieur à γ ? (On pourra commencer par déterminer l'ensemble de ses points invariants.)

Partie C

Dans toute la suite, on suppose $\beta = \gamma \neq 0$

1. On identifie P au plan complexe, Soit z et z' les affixes respectives des points A et A$'$. Exprimer z' en fonction de z. En déduire la nature géométrique de l'application $f_{\beta,\ \beta}$ et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Soit a et b deux nombres réels donnés. De quelle droite D_β la droite d'équation $x' = a$ est-elle l'image par $f_{\beta,\ \beta}$? De quelle droite D'_β la droite d'équation $y' = b$ est-elle l'image ?

   Montrer que, lorsque β varie, chacune des droites D_β et D'_β passe par un point fixe. Que peut-on dire des directions D_β et D'_β ?
3. Soit A$'$ le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$. Former l'équation de la courbe Γ sur laquelle se déplace, lorsque β varie, l'antécédent A de A$'$ dans $f_{\beta,\ \beta}$. Quelle est la nature géométrique de Γ ?

   Retrouver ce résultat en utilisant la question 2. précédente,
4. Soit A_0 un point fixe de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ distinct de l'origine du repère. Sur quelle ligne L l'image de A_0 par $f_{\beta,\ \beta}$ se déplace-t-elle lorsque β varie ?

   Montrer que ce résultat est prévisible, grâce aux propriétés du barycentre.
5. Établir la relation suivante, vraie quels que soient A et β.

$$\beta\left(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{A'B}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{A'C}^2\right) = 2(1 - \beta\mathrm{A'A}^2$$