

☞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1976 ☞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - [2 + i(m - \sqrt{3})]z + 1 + m\sqrt{3} + i(m - \sqrt{3}) \quad (1)$$

où m est un paramètre réel.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par M' et M'' les points dont les affixes z' et z'' sont les solutions de l'équation (1).
- Déterminer m pour que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ soient orthogonaux.
 - Déterminer m pour que la distance de M' à M'' soit égale à un nombre réel positif ou nul ℓ donné.

EXERCICE 2

Un sac renferme 8 jetons de forme et de matière identiques dont 3 sont blancs et 5 sont noirs. On extrait du sac, au hasard, un par un, 4 jetons que l'on dispose, dans l'ordre où ils sont tirés, dans quatre cases numérotées de 1 à 4. (Le premier jeton est placé dans la case numéro 1, le deuxième dans la case numéro 2, etc.)

- On veut calculer la probabilité pour que l'on ait :
A : « Les 4 cases sont occupées par des jetons noirs ».
B : « Les cases 1 et 3 sont occupées par des jetons blancs, les cases 2 et 4 par des jetons noirs ».
Donner un espace probabilité fini tel que A et B soient des événements et calculer leurs probabilités respectives.
- Sur cet espace probabilisé, on définit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le plus petit des numéros de cases contenant un jeton noir.
Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et sa variance,

PROBLÈME

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Étant donné deux réels a et b , on désigne par $f_{a, b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_{a, b}(x) = ae^x + be^{-x}.$$

Partie A

On étudie dans cette partie le cas où $a = 1$ et $b = -3$; on désigne par g la fonction $f_{1, -3}$.

- Étudier la fonction g et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé,
- Montrer que g admet une fonction réciproque que l'on explicitera et que l'on représentera dans le même repère.

Partie B

Dans un plan affine euclidien, on désigne par x et y les coordonnées d'un point M relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On suppose x et y fonctions du temps t qui décrit \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x &= e^t + 3e^{-t} \\ y &= e^t - 3e^{-t} \end{cases}$$

1. Calculer les composantes du vecteur-accélération du point M à l'instant t . Que remarque-t-on?
2. Déterminer la trajectoire du point M , en préciser la nature géométrique et la tracer.
3. Pour quelles valeurs de t le mouvement de M est-il accéléré? retardé? Préciser les portions de trajectoire correspondantes,

Partie C

On désigne par E l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ où (a, b) décrit \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans lui-même muni de l'addition et de la multiplication par un réel.
2. On désigne par u la fonction $f_{1,0}$ et par v la fonction $f_{0,1}$. Montrer que (u, v) est une base de E .
3. Étant donné un réel p , on désigne par $h_{a,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$h_{a,b}(x) = f_{a,b}(x+p).$$

Vérifier que $h_{a,b}$ est un élément de E .

4. Soit l'application $\varphi_p: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f_{a,b} & \mapsto & h_{a,b} \end{array}$
 - a. Montrer que φ_p est linéaire. Quelle est sa matrice M relativement à la base (u, v) ? φ_p est-elle bijective?
 - b. Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications φ_p où p décrit \mathbb{R} .
Montrer que $\varphi_q \circ \varphi_p$ est un élément de \mathcal{F} . En déduire la structure de \mathcal{F} muni de la loi de composition des applications.