∽ Baccalauréat C Grenoble septembre 1977 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de 5^n.
2. En déduire le reste de la division par 7 de 5^{136}.
3. Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10. Déterminer x pour que l'on ait

$$5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0 \pmod 7.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point M de coordonnées $(x ;\ y ;\ z)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x' ;\ y' ;\ z'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & -z+1\\ y' & = & x-4\\ z' & = & -y \end{array}\right.$$

Démontrer que f est composée d'une rotation $\mathscr{R}$, d'axe δ, et d'une translation T, de vecteur $\vec{v}$, $\vec{v}$ étant un vecteur directeur de δ (autrement dit, f est un vissage). Déterminer δ et $\vec{v}$.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication externe par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont on notera $\underline{0}$ l'élément nul.
Si a et b sont deux nombres réels, on note $g_{a,\ b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_{a,\ b}(x) = (a\cos x + b\sin x)$$

et on note $f_{a,\ b}$ l'application définie par :

$$f_{a,\ b}(x) = \text{e}^{-x}g_{a,\ b}(x) = \text{e}^{-x}(a\cos x + b\sin x).$$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ b}$ lorsque a et b parcourent $\mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace de $\mathscr{F}$.
   b. Montrer que les deux applications $e_1 = f_{1,\ 0}\ (x \longmapsto \text{e}^{-x}\cos x)$ et $e_2 = f_{0,\ 1}\ (x \longmapsto \text{e}^{-x}\sin x)$ forment une base de E.
2. **a.** Soit f un élément de E ; montrer que sa fonction dérivée est élément de E.
   On note D l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout élément de E associe sa fonction dérivée ; montrer que D est un endomorphisme de E et calculer la matrice de D dans la base $(e_1,\ e_2)$.
   b. Montrer que D admet une application réciproque D^{-1}, dont on déterminera la matrice dans la base $(e_1,\ e_2)$. En déduire que tout élément f de $\mathscr{E}$ a une primitive et une seule dans $\mathscr{E}$.
   c. *Application* : trouver la primitive dans $\mathscr{E}$ de l'application $f = f_{2,\ -4}$ (définie par $f(x) = \text{e}^{-x}(2\cos x - 4\sin x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

3. Soit f un élément de $\mathscr{E}$, et f' et f'' ses dérivées première et seconde.
   a. Montrer, sans calcul, qu'il existe trois nombres réels α, β, γ, non tous nuls tels que

$$(1) \qquad \alpha f + \beta f' + \gamma f'' = \underline{0}.$$

   b. Déterminer un triplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ de nombres réels non tous nuls, indépendants de f, pour lequel (1) est satisfaite,
   c. Utiliser ce résultat pour retrouver la matrice de D^{-1} dans la base $(e_1,\ e_2)$.
4. Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé directe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Au point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$ de P on associe le nombre complexe
   $z = a + \mathrm{i}b$, appelé affixe de M. Soit φ la bijection de $\mathscr{E}$ sur P qui a $f_{a,\ b}$ associe le point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$ de P, et soit $T = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$.
   Si M est le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on note $\left(a'\ ;\ b'\right)$ les coordonnées du point $M' = T(M)$. On se propose d'étudier T.
   a. Exprimer (a' ; b') en fonction de $(a\ ;\ b)$, et l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
   b. Quelle est la nature de l'application T ?

Partie B

On considère la courbe (C), ensemble de points de P dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ satisfont à la relation $(y - \cos x)^2 = \cos 2x$.

1. Étudier les variations des fonctions ϕ_+ et ϕ_- définies par

$$\phi_+(x) = \cos x + \sqrt{\cos 2x}, \quad \text{et} \quad \phi_-(x) = \cos x - \sqrt{\cos 2x}$$

   (on pourra admettre qu'aux points d'abscisse x telle que $\cos 2x = 0$, la courbe (C) admet une tangente de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
   Comment peut-on déduire la partie de (C) située dans l'ensemble des points dont l'abscisse x vérifie $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$ de la partie de (C) située dans l'ensemble des points dont l'abscisse x vérifie $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$
   Construire la courbe (C).
2. On note $\left(C_{a,\ b}\right)$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto g_{a,\ b}(x)$.
   On pose $t = \operatorname{tg} x$. Montrer que pour que les courbes (C) et $\left(C_{a,\ b}\right)$ aient un point commun d'abscisse x, il faut et il suffit que t satisfasse à une équation du second degré $\left(E_{a,\ b}\right)$ qu'on déterminera.
3. On dira que les courbes (C) et $\left(C_{a,\ b}\right)$ sont tangentes si l'équation $\left(E_{a,\ b}\right)$ admet une racine double. Montrer que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que a et b satisfassent à une équation du second degré, qu'on déterminera.
4. Soit (H) l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $(a\ ;\ b)$ vérifient $a^2 - b^2 - 2a = 0$. Montrer que (H) est une hyperbole, dont on précisera les sommets et les foyers.
   Quelle est la nature de l'image (H') de (H) par T ?
   Soit U l'application de P dans P qui au point M associe le milieu du bipoint $(M\ ;\ T(M))$.
   Quelle est la nature de U ? Quelle est la nature de l'image (H'') de (H) par U ?