Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble septembre 1983

EXERCICE 1

Soit f l'application du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lui-même définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = z^3 + (1-5\text{i})z^2 - 2(5+\text{i})z + 8\text{i}.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet comme solution un nombre complexe imaginaire pur.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ sachant que $f(z)$ est un produit de la forme

$$f(z) = (z - \lambda\text{i})\left(z^2 + az + b\right) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } (a,\ b) \in \mathbb{C}^2.$$

3. On désigne par z_1, z_2, z_3 les solutions trouvées au 2., z_1 étant celle dont la partie réelle est strictement positive, z_2 celle ont la partie réelle est nulle. Montrer que z_1, z_2, z_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

EXERCICE 2

1. Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - (2x+1)\text{e}^{-2x}.$$

   et tracer sa courbe représentative dans un repère cartésien orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).
2. On désigne par $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe représentative de f, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
   Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$. $\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

On désigne par (P) un plan rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ et par $\overrightarrow{\text{P}}$ le plan vectoriel associé.
À tout couple $(a,\ b)$ élément de $\mathbb{R}^2$ on associe l'application linéaire de $\overrightarrow{\text{P}}$ dans $\overrightarrow{\text{P}}$ notée $\varphi_{a,\ b}$ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi_{a,\ b}\left(\vec{\imath}\right) &= \left(b + \frac{a}{2}\right)\vec{\imath} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\\ \varphi_{a,\ b}\left(\vec{\jmath}\right) &= a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \left(b - \frac{a}{2}\right)\vec{\jmath}\end{aligned}$$

Partie A

1. Déterminer les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi_{a,\ b}$ n'est pas bijective. Déterminer suivant les valeurs de a et b l'image $\varphi_{a,\ b}\left(\overrightarrow{\text{P}}\right)$ de $\overrightarrow{\text{P}}$ par $\varphi_{a,\ b}$ ainsi que le noyau de $\varphi_{a,\ b}$ (On appelle noyau de $\varphi_{a,\ b}$ l'ensemble des antécédents par $\varphi_{a,\ b}$ du vecteur nul de $\overrightarrow{\text{P}}$),

2. Lorsque $\varphi_{a,\ b}$ n'est pas bijective, montrer que son noyau et son image sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $a = b = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\varphi_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}$ est alors une projection vectorielle dont on déterminera les éléments.
2. Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ pour lesquels $\varphi_{a,\ b}$ est un endomorphisme involutif.
   Lorsque $\varphi_{a,\ b}$ est une symétrie vectorielle, préciser ses éléments caractéristiques,
3. Pour quelles valeurs de a et b, $\varphi_{a,\ b}$ conserve-t-elle le produit scalaire ?

Partie C

I désignant le point de (P) de coordonnées (1 ; 2), on note $f_{a,\ b}$ l'application affine de (P) dans (P) associée à $\varphi_{a,\ b}$ et laissant I invariant.

1. Quels sont les couples $(a,\ b)$ pour lesquels $f_{a,\ b}$ est une bijection ? Que peut-on dire dans ce cas de l'image par $f_{a,\ b}$ d'une droite de (P) ?
2. On note f l'application $f_{a,\ b}$ pour laquelle $a = 0$ et $b = 2$ et (D) la droite d'équation $x+2y-5 = 0$.
   Quelle est la nature de $f_{a,\ b}$? En déduire, sans calculs, l'image de (D) par f.
3. Quelle est la nature de $f_{1,\ 0}$? Préciser ses éléments caractéristiques.
4. Soit (Δ) une droite quelconque de (P) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$ avec $(\alpha,\ \beta) \neq (0,\ 0)$.
   a. a et b étant supposés quelconques, quelles sont à priori, les natures possibles de l'image de (Δ) par $f_{a,\ b}$ notée $f_{a,\ b}(\Delta)$?
   b. Quelle condition doit vérifier $\overrightarrow{u}$ pour que $f_{a,\ b}(\Delta)$ soit réduite à un point ?
   c. $f_{a,\ b}$ étant supposée bijective, existe-t-il des droites (Δ) de (P) parallèles à leur image $f_{a,\ b}(\Delta)$?