Baccalauréat Grenoble juin 1966
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer le module et l'argument de z.
2. Calculer z^6.
3. Déterminer les modules et arguments des racines carrées de z.

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, le point A de l'axe $x'\mathrm{O}x$ d'abscisse a, a désignant un nombre positif, et la droite (D) d'équation

$$x - 2y = 0.$$

Une droite variable (Δ), passant par A, de pente m, coupe la droite (D) en P et l'axe $y'\mathrm{O}y$ en Q.

1. Calculer, en fonction de m et de a, les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que l'aire arithmétique S du triangle OPQ est donnée par la formule
$$S = \dfrac{a^2m^2}{|2m-1|}.$$
3. S est une fonction de m, dont on étudiera la variation et dont on tracera le graphe.
Discuter, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation
$$S = k^2 \qquad (k \geqslant 0).$$
4. On considère l'inversion de centre O, de puissance a^2 ; soit P_1 l'inverse de P, Q_1 celui de Q.
S_1 désignant l'aire arithmétique du triangle $\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$, montrer que
$$SS_1 = \dfrac{a^4}{5}.$$
Pour quelles valeurs de m a-t-on $S = 5S_1$?
Préciser les positions correspondantes de la droite (Δ).
5. Montrer que, m variant, la droite $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ reste tangente à une parabole, dont on déterminera le foyer et la directrice.
Former l'équation de cette parabole.
6. Montrer que le point Q_1 se déduit du point P_1 par une similitude indépendante de m.
En déduire, quand m varie, le lieu du milieu, I, du segment $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$.