∽ Grenoble juin 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Le nombre z appartient à l'ensemble des nombres complexes et u est un paramètre réel tel que $0 \leqslant u \leqslant \pi$.
On considère l'équation

$$(E) \qquad z^2 + 2(1-\cos u)z + 2(1-\cos u) = 0.$$

Résoudre (E). Soit z_1 et z_2 les racines de (E).
Déterminer les modules, ρ_1 et ρ_2 ainsi que les arguments, θ_1 et θ_2, de z_1 et z_2 (θ_1 et θ_2 appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi]$ et $\theta_2 \leqslant \theta_1$),

EXERCICE 2

Mettre la fonction $y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ sous la forme

$$y = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$$

a et b étant des constantes à déterminer.
Calculer une primitive de cette fonction et une primitive du carré de cette même fonction.

EXERCICE 3

Soit $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ un repère orthonormé.
Une transformation T associant au point $m(x\ ;\ y)$ le point $M(X\ ;\ Y)$ est définie par les propriétés simultanées suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{O}m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M} = 0\,; \\ \text{le milieu, } I\text{, de } mM \text{ appartient à la droite } y'y. \end{cases}$$

1. Le point m étant donné, construire le point M. Étudier le cas où m appartient à l'un des axes de coordonnées.

   Soit (P) l'ensemble des points du plan n'appartenant pas à l'un des axes de coordonnées.

   Dans toute la suite du problème on supposera que m appartient à (P) et l'on désignera par droite, cercle, etc. les parties de ces courbes incluses dans (P).
2. Montrer que la transformation T est involutive sur (P). Établir que les coordonnées x, y, X, Y sont liées par les relations

$$x = -X \quad \text{et} \quad y = \frac{X^2}{Y}.$$

3. Trouver, dans les trois cas suivants, la figure D, transformée par T d'une droite d ayant pour équation :
   a. $x = a$, a constante ;
   b. $y = b$, b constante ;
   c. $x + y - 1 = 0$.

   Trouver, chaque fois, l'équation de la courbe D ; mettre cette équation sous la forme $Y = f(X)$; construire D avec précision.

4. On effectue l'inversion de pôle O et de puissance k. m_1 et M_1 désignent les inverses respectifs de m et M.

   a. Montrer que la droite m_1M_1 reste parallèle à une direction fixe, quand m se déplace dans (P).

   b. On suppose maintenant que m_1M_1 conserve une longueur constante, ℓ. Montrer que la droite mM reste tangente à un cercle fixe, de centre O, dont on demande d'exprimer le rayon en fonction de k et ℓ.

5. Dans cette question on suppose que m décrit le cercle fixe (ω) d'équation

$$x^2 + y^2 + 2\lambda X = 0 \quad (\lambda > 0).$$

   Montrer que la droite mM est tangente au cercle (ω).
   Soit Δ la droite d'équation $x = 2\lambda$.
   La droite OM coupe Δ en Q et recoupe (ω) en N. Démontrer que $\overline{\text{O}Q} = \overline{NM}$.
   En déduire un procédé de construction de la courbe transformée par T du cercle (ω).

N. B. - Les questions 3, 4, 5 sont indépendantes.