

🌀 Baccalauréat Grenoble juin 1966 🌀
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer le module et l'argument de z .
2. Calculer z^6 .
3. Déterminer les modules et arguments des racines carrées de z .

PROBLÈME

On donne un repère orthonormé d'axe $x'Ox, y'Oy$, le point A de l'axe $x'Ox$ d'abscisse a , a désignant un nombre positif, et la droite (D) d'équation

$$x - 2y = 0.$$

Une droite variable (Δ) , passant par A, de pente m , coupe la droite (D) en P et l'axe $y'Oy$ en Q .

1. Calculer, en fonction de m et de a , les coordonnées des points P et Q .
2. Montrer que l'aire arithmétique S du triangle OPQ est donné par la formule

$$S = \frac{a^2 m^2}{|2m - 1|}.$$

3. S est une fonction de m , dont on étudiera la variation et dont on tracera le graphe. Discuter, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation

$$S = k^2, \quad (k > 0).$$

4. On considère l'inversion de centre O, de puissance a^2 ; soit P_1 l'inverse de P , Q_1 celui de Q .
 S_1 désignant l'aire arithmétique du triangle OP_1Q_1 , montrer que

$$S_1 = \frac{a^4}{5}.$$

Pour quelles valeurs de m a-t-on $S = 5S_1$?

Préciser les positions correspondantes de la droite (Δ) .

5. Montrer que, quand m varie, la droite P_1Q_1 reste tangente à une parabole, dont on déterminera le foyer et la directrice.

Former une équation de cette parabole.

6. Montrer que le point Q_1 se déduit du point P_1 par une similitude indépendante de m .

En déduire, quand m varie, le lieu du milieu, I , du segment P_1Q_1 .