

↻ Baccalauréat Grenoble septembre 1966 ↻
Mathématiques et Mathématiques et Technique

EXERCICE 1

Le repère, d'origine O, orthonormé, a pour axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

1. Déterminer l'équation de la sphère (S) satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :
 - son rayon est $\sqrt{6}$;
 - son centre, Ω , appartient à $z'z$;
 - elle passe par le point $A(x = -1 ; y = 2 ; z = 3)$;
 - O est extérieur à (S).
2. $M(x ; y ; z)$ étant un point quelconque de l'espace, évaluer, en fonction de x, y, z , le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A}$.
En déduire l'équation du plan tangent en A à (S).
3. Déterminer l'équation de la surface conique de sommet O circonscrite à (S).

II.

Un plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

M étant un point du plan, distinct de O, on appelle P sa projection orthogonale sur $x'x$ et m le milieu de OP.

Soit (Δ_M) la droite passant par m et M. On désigne par α l'abscisse de M et par β son ordonnée.

Partie A

1. Déterminer l'équation de (Δ_M) en fonction de α et β .
2. (Δ_M) étant donnée, construire M.
Indiquer les cas d'exception.

Partie B

M appartient à la parabole (P_1) d'équation $y = ax^2$ (a : constante non nulle).

Démontrer que la droite (Δ_M) est tangente en M à (P_1) .

Partie C

M appartient à la parabole (P_2) d'équation $y^2 = 2px$ (p : constante non nulle).

(Δ_M) coupe $y'y$ en H ; la perpendiculaire en H à (Δ_M) coupe $x'x$ en K.

Évaluer OK.

En déduire l'enveloppe de (Δ_M) quand M décrit (P_2) .

Donner l'équation de cette enveloppe.

Partie D

1. On désigne par G le centre de gravité du triangle OPM .
Exprimer les coordonnées de G en fonction de α et β .
2. M appartient au cercle (C) , de centre O et de rayon R .
 - a. Déterminer l'ensemble (Γ) des points G quand M décrit (C) .
 (Γ) est une conique, dont on précisera les foyers, F et F' , ainsi que les directrices respectivement associées, (D) et (D') .
 - b. La perpendiculaire en G à (Δ_M) coupe $x'x$ en I .
Démontrer que les points F, F', m et I forment une division harmonique.
Quel rôle joue (Δ_M) pour la conique (Γ) ?