Baccalauréat Grenoble septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

On donne les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1-\text{i}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{6}(1+\text{i}) + \sqrt{2}(1-\text{i}).$$

On pose $z_1 z_2$ (produit de z_1 par z_2.
Déterminer les nombres réels a, b, u et v tels que

$$z_1 = a + \text{i}b \quad \text{et} \quad Z = u + \text{i}v.$$

Déterminer le module, ρ_1 et l'argument, θ_1, de z_1.
Déterminer le module, ρ et l'argument, θ, de Z ; en déduire le module, ρ_2 et l'argument, θ_2, de z_2.
Les déterminations des arguments seront prises dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
Évaluer $\cos\theta_2$ et $\sin\theta_2$.

II.

On donne un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et une constante positive a.
Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$y = 2a\frac{x^2 + 2ax - 5a^2}{x^2 - 5a^2}.$$

Démontrer que le graphique obtenu admet un centre de symétrie, S.

1. On désigne par $\mathcal{J}$ l'inversion plane de pôle O de puissance $4a^2$.
   $\mathcal{J}$ transforme $\text{M}(x, y)$ en $\text{M}_1\left(x_1\,;\,y_1\right)$.
   Montrer que

   $$x_1 = \frac{4a^2}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{4a^2}{x^2 + y^2}y.$$

   Exprimer, sans nouveaux calculs, x et y en fonction de x_1 et y_1.
2. On désigne par $\mathcal{T}$ la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{\text{V}} = 2a\overrightarrow{u}$ $\left(\overrightarrow{u}\ \text{: vecteur unitaire de l'axe } x'\text{O}x\right)$.
   $\mathcal{T}$ transforme M_1 en $\text{M}_2\,(x_2\,;\,t_2)$.
   On appelle T la transformation qui fait passer de M_1 à M_2.
   Exprimer x_2 et y_2 en fonction de x et y, ainsi que x et y en fonction de x_2 et y_2.
3. On considère les points I et J de $x'\text{O}x$ d'abscisses respectives

   $$a\left(1+\sqrt{5}\right) \quad \text{et} \quad a\left(1-\sqrt{5}\right).$$

   Soit (C) le cercle de diamètre IJ. M décrit (C). MO recoupe (C) en N.
   Que peut-on dire de $\text{M}_1 1$ et N ?
   Que peut-on dire de M_2 et N ?
   En déduire l'ensemble des points M_2.
   Que peut-on dire du cercle (C) pour la transformation T ?

4. On désigne par (Γ) le cercle de rayon $a\sqrt{5}$ centré au point Γ de $x'\mathrm{O}x$ d'abscisse γ.
Soit (Γ_2) la courbe transformée de (Γ) par T.
Déterminer (Γ_2). Discuter, suivant les valeurs de γ, la nature de (Γ_2).
Lorsque (Γ_2) est un cercle, calculer l'abscisse, γ_2 de son centre en fonction de γ.