

∞ Baccalauréat C groupe 1 juin 1983 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Dans l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3, on donne deux points fixes A et B .
Déterminer l'ensemble (S) des couples (P, Q) de \mathcal{E}^2 qui vérifient les deux conditions :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0.$$

EXERCICE 2

3 POINTS

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^3 le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 5x + 6y + 7z = 8. \end{cases}$$

2. Démontrer qu'il existe un et une seul triplet de \mathbb{Z}^3 , solution du système précédent, tel que :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1051.$$

PROBLÈME

3 POINTS

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f qu'on notera \mathcal{D} . Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathcal{D} .
2. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} , l'unité de distance étant 2 cm, dessiner la courbe représentative F de f .
3. Démontrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $xy + 1 \neq 0$, f satisfait la propriété

$$f(x) \cdot f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \quad (\text{P})$$

Partie II

On considère maintenant le fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de g qu'on notera \mathcal{D}_1 . Dédire brièvement de g la continuité et la dérivabilité de g sur \mathcal{D}_1 .
2. Démontrer que, pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}_1^2$ tel que $xy + 1 \neq 0$, g satisfait la propriété (P).
3. Dessiner la courbe représentative G de g dans le même plan rapporté au repère \mathcal{R} que F .

4. Dans ce plan, on appelle A l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ sont telles que :

$$0 \leq x \leq 1 - \epsilon$$

(où ϵ est un réel strictement positif et inférieur à 1) et

$$g(x) \leq y \leq f(x).$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\epsilon)$ de A (on raisonnera sur $f - g$).

$\mathcal{A}(\epsilon)$ admet-elle une limite lorsque ϵ tend vers 0?

Partie III

Dans cette partie, on appelle Δ l'intervalle ouvert $] - 1 ; 1[$.

1. y étant fixé dans Δ , étudier la fonction u définie sur Δ par :

$$u(x) = \frac{x+y}{1+xy}.$$

2. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions φ définies sur Δ , qui sont continues sur Δ et dérivables en zéro et qui vérifient pour tout couple $(x; y)$ éléments de Δ , la relation

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \quad (\text{P})$$

- Justifier l'écriture (P).
- Rechercher s'il existe des fonctions φ constantes sur Δ .
Dans toute la suite, on suppose que φ n'est pas la fonction nulle sur Δ .
- Montrer que $\varphi(0) = 1$.
- Montrer que φ ne peut s'annuler sur Δ et que, pour tout x de Δ , on a

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

3. a. x et y appartenant à Δ , montrer qu'il existe un réel h tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

- b. Réciproquement, x et $x+h$ étant donnés dans Δ , montrer qu'il existe y dans Δ tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

(On pourra utiliser le 1. Déterminer y .)

- c. On suppose h non nul, exprimer le rapport

$$\rho = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

au moyen de x et de y déterminé au III. 3. b..

- d. Montrer que φ est dérivable en tout point x de Δ . On rappelle que φ est supposée dérivable en zéro (on posera $\varphi'(0) = C$).

En conclure que les fonctions φ sont telles que pour tout x de Δ :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{C}{1-x^2}.$$

4. a. Démontrer qu'il existe deux réels m et n tels que, pour tout x différent de 1 et de -1 :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{n}{1+x}.$$

- b. Déterminer alors toutes les fonctions φ .
- c. Peut-on trouver des fonctions φ non constantes vérifiant les conditions du 2° sur les intervalles $] -1 ; 1[$, $] -1 ; 1]$, $[-1 ; 1[$, $[-1 ; 1]$? Pouvait-on prévoir le résultat?