Durée : 4 heures

Baccalauréat C Groupe 1 septembre 1984

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & 2x - x\ln x \quad \text{si } x > 0\\ f(0) & = & 0\end{array}\right.$$

1. f est-elle continue en 0 ?
f est-elle dérivable en 0 ?

2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on prendra un centimètre comme unité).

EXERCICE 2 **5 points**

Une suite est définie par :

$$u_0 = 1\,; \quad u_1 = 5,5\,; \quad u_{n+2} - u_{n+1} + 0,25u_n = 0.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2. Déterminer un rang n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on ait $u_n < 10^{-6}$.

PROBLÈME **5 points**

On considère dans le plan affine euclidien orienté un triangle ABC. On désigne suivant une habitude ancienne par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures des angles géométriques du triangle.
$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont donc trois réels positifs tels que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$.
Le triangle ABC est direct, c'est à dire que les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right)$ ont leurs mesures principales respectivement égales à $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
On se propose d'étudier l'existence d'un point M, intérieur strictement au triangle ABC, tel que les droites (MA), (MB), (MC) possède la propriété suivante :
les angles orientés des couples de droites $(AB,\ AM)$, $(BC,\ BM)$, $(CA,\ CM)$ ont la même mesure principale notée α, $\alpha > 0$.

Partie A

1. Montrer que si M existe, alors $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.
Montrer que le point M est sur le cercle tangent à (BC) en B et passant par A. En déduire une construction de M.

2. Déduire des relations métriques (proportionnalité des côtés et des sinus) dans les triangles ABM, BMC, CMA, la relation :

$$\sin^3\alpha = \sin\left(\widehat{A}-\alpha\right)\sin\left(\widehat{B}-\alpha\right)\sin\left(\widehat{C}-\alpha\right).$$

3. Calculer α lorsque le triangle ABC est équilatéral. Calculer $\cot\alpha$ (ou $\tan\alpha$) lorsque la triangle ABC est isocèle et rectangle, et donner une valeur approchée de α.

Partie B

Étant donné un réel α, $\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$, on cherche à quelle condition on peut lui associer un triangle ABC et un point M correspondant.

1. Démontrer que si un triangle ABC et un point M conviennent, alors le triangle $A'B'C'$ et tout point M' déduits de la figure $ABCM$ par une similitude directe conviennent aussi.
2. On reprend la relation du A 2. et on pose :

$$a = \widehat{A} - \alpha, b = \widehat{B} - \alpha, c = \widehat{C} - \alpha \text{ avec } a + b + c = \pi?3\alpha.$$

La relation du 2. s'écrit alors :

$$\sin^3 \alpha = \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \frac{1}{2} \sin c\,[\cos(3\alpha + c) - \cos(2b + c + 3\alpha)]\,.$$

Si α et c sont donnés, cette relation permet de calculer b et $\widehat{B}$.
Lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, montrer que b est donné par :

$$\sin(2b + c) = \sin c + \frac{1}{4\sin c}.$$

Déterminer les valeurs de c pour lesquelles le second membre est inférieur ou égal à 1.
Montrer qu'il n'y a qu'un seul triangle admettant un angle α égal à $\dfrac{\pi}{6}$ et indiquer lequel (à une similitude près).