**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Groupe 1 [1] juin 1970

**EXERCICE 1**

**1.** Étudier les variations de la fonction qui, à tout $x$ réel, associe

$$2\cos x - \cos 2x.$$

**2.** Soit $F$ la fonction définie par

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right],\quad F(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

Démontrer que $F$ admet une fonction réciproque, $G$, dont on précisera le domaine de définition et les propriétés.

Étudier les variations de $G$ et tracer sa représentation graphique.

**3.** Calculer les valeurs de $G$ et de sa dérivée pour les valeurs $-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}$ et $+1$ de la variable.

Calculer $\cos[G(t)]$ et $\sin[G(t)]$ en fonction de $t$.

**EXERCICE 2**

On donne deux nombres positifs, $a$ et $b$, $(0 < a < b)$, et deux nombres positifs, $\lambda$ et $\mu$. On définit deux suites par les relations suivantes :

$$\begin{array}{llllll} u_1 & = & a & v_1 & = & b \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} & v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} \end{array}$$

**1.** Comment doit-on choisir $\lambda$ et $\mu$ pour que l'on ait

$$u_1 < u_2 < v_2 < v_1?$$

b) $\lambda$ et $\mu$ étant ainsi choisis, démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont une limite commune, que l'on déterminera.

**EXERCICE 3**

On donne, dans le plan, un repère orthonormé, d'axes O$x$ et O$y$ ; un cercle $(\omega)$ a pour centre $\omega(+2\,;\,0)$ et pour rayon 1.

**1.** Trouver l'équation du cercle $(\omega)$ et celle de la polaire $(\Delta)$ de l'origine, O, par rapport à $(\omega)$.

Comment doit-on choisir les réels $u$ et $v$ pour que la droite (D) $(ux+vy-1=0)$ coupe $(\omega)$ en deux points distincts, P et Q ?

La droite (D) coupant $(\omega)$ en deux points distincts, P et Q, démontrer que l'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 + 2\lambda(ux + vy - 1) = 0,$$

où $\lambda$ est un réel quelconque, représente un cercle contenant P et Q.

Trouver l'équation du cercle $(\Gamma)$ passant par les points O, P et Q.

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire

**2.** Les droites OP et OQ recoupent le cercle ($\omega$) en des points P$'$ et Q$'$ respectivement. La droite (D$'$) joignant P$'$ et Q$'$ coupe en I la droite PQ ; démon- trer géométriquement que I a pour abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Dans l'inversion de pôle O laissant globalement invariant le cercle ($\omega$), quelle est la courbe transformée du cercle ($\Gamma$) ? En déduire que la droite (D$'$) a pour équation

$$3(ux+vy+1)-4x=0.$$

**3.** Démontrer analytiquement et géométriquement que, si la droite (D) pivote autour du point fixe $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$, la droite (D$'$) pivote autour d'un point fixe $M_{l1}\left(x_1\ ;\ y_1\right)$. Calculer $x_0$ et $y_0$ en fonction de $x_1$ et $y_1$ et inversement.

On considère la transformation ponctuelle plane $T$ qui à tout point $M_0$ associe le point $M_1$. Trouver les points qui sont invariants par $T$.

Donner une définition géométrique de $T$.

Démontrer géométriquement que le cercle ($\omega$) est globalement invariant par $T$.

Trouver géométriquement tous les cercles invariants par $T$ ; donner l'équation générale de ces cercles.

**4.** Une droite ($\Lambda$) menée par $\omega$ coupe le cercle ($\omega$) en N et N$'$ ; les bissectrices des droites ON et ON$'$ coupent la droite NN$'$ en U et en V respectivement ; soit E le milieu de UV.

Démontrer géométriquement que E est équidistant de l'axe O$y$ et de la droite ($\Delta$).

Utiliser ce résultat pour obtenir l'équation du lieu géométrique, ($\sum$), des points U et V lorsque ($\Lambda$) pivote autour de $\omega$.

On mettra cette équation sous la forme

$$y^2=f(x),$$

où $f$ est une fraction rationnelle.

On démontrera que la dérivée de la fonction positive $y$ que définit la formule précédente s'annule pour une seule valeur de $x$.

On construira enfin la courbe ($\sum$).