Durée : 4 heures

Baccalauréat C Groupe 1 juin 1985

Exercice 1 **5 points**

1. Exprimer les racines z_k dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{5}$, où $0 \leqslant k \leqslant 4$.
2. Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixe z_k? Déterminer l'isobarycentre des points A_k.

   En déduire une équation du second degré à coefficients entiers satisfaite par $a = \cos \dfrac{2\pi}{5}$.
3. Résoudre cette équation; calculer $\cos \dfrac{2\pi}{5}$, $\cos \dfrac{4\pi}{5}$, $\cos \dfrac{\pi}{5}$ et $\cos \dfrac{8\pi}{5}$.
4. À tout nombre complexe u, différent de -1, on associe $z = \dfrac{u-1}{u+1}$.

   Calculer u en fonction de z.
5. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(u-1)^5 = (u+1)^5.$$

   Dessiner les affixes des racines.

Exercice 2 **5 points**

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan P.
On désigne par s la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) et on pose D = s(B).
Soit enfin f l'unique application affine de P dans lui-même telle que

$$f(\text{A}) = \text{A},\ f(\text{B}) = \text{C},\ \text{et}\ f(\text{C}) = \text{D}.$$

1. On pose $g = s \circ f$.
   a. Déterminer l'image par g des points A, B, C et du milieu I du segment [BC].
   b. Établir que g est une symétrie dont on précisera l'axe Δ et la direction.
   c. Exprimer f en fonction de g et de s; en déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point M du plan par f.
2. Comment faut-il choisir A, B et C pour que f soit une isométrie? Expliciter alors cette isométrie.

Problème **5 points**

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par la relation

$$f(x) = \frac{1-x}{3}\mathrm{e}^x.$$

On se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution a de l'équation $f(x) = x$.

1. Étude de f.

a. Étudier le sens de variation de f, et tracer l'allure de sa courbe représentative (unité graphique : 4 cm).

b. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une solution a et une seule appartenant à $[0\,;\,1]$.

c. Déterminer l'image de $[0\,;\,1]$ par f ; en déduire que $a \in [0\,;\,1]$

2. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = \dfrac{1}{3}$.

a. Prouver que, pour tout entier n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.

b. Montrer que $u_1 \leqslant a$; en déduire que :

$$|u_0 - a| \leqslant u_0 - u_1 \leqslant 2,5 \cdot 10^{-2}.$$

c. Établir, par récurrence sur p, que pour tout p, $u_{2p+1} \leqslant a \leqslant u_{2p}$.

3. Convergence de (u_n) vers a.

a. Démontrer que, pour tout élément x de $\left[0\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$, $-0,16 \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

En déduire que : $|f(x) - f(a)| \leqslant 0,16|x - a|$.

b. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|u_n - a| \leqslant (0,16)^n\,|u_0 - a|.$$

En déduire que (u_n) converge vers a.

c. Calculer une valeur décimale approchée de a avec la précision 10^{-3}. Déterminer un entier p tel que $\left|u_p - a\right| \leqslant 10^{-12}$ (on ne demande pas de calculer u_p).