∽ Baccalauréat C Groupe I septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

La formule

$$(1) \qquad z = 2x + \left(3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) y$$

permet de faire correspondre à tout couple $(x\ ;\ y)$ de réels, au lieu de l'affixe ordinaire $x + \mathrm{i}y$, un complexe z.

1. On considère la transformation T de $\mathbb{R}^2$ exprimée par les formules

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & x + 3y \\ y' & = & -x - 2y. \end{array}\right.$$

   Aux couples $(x\ ;\ y)$, $\left(x'\ ;\ y'\right)$ ainsi liés on associe par (1) des complexes z, z'.
   Vérifier qu'il existe un complexe k, indépendant des couples considérés, tel que $z' = kz$. Calculer k, k^2, k^3.
2. Déterminer x et y pour que z soit de module 2, de partie réelle positive, et z' imaginaire conjugué de z.
   Utilisant un repère cartésien orthonormé, figurer le couple $(x\ ;\ y)$ trouvé et ses images successives par T.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé, l'unité d'aire est l'aire d'un carré dont les côtés ont pour longueur l'unité. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points du plan à coordonnées positives et soit f la fonction numérique

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{2 - x^2} - 1.$$

1. Montrer que tous les points de la courbe représentative de f sont équidistants du point $(0\ ;\ -1)$.
   Tracer la partie C de cette courbe située dans $\mathcal{D}$.
2. Soit $\mathcal{D}_1$ la partie de $\mathcal{D}$ formée par les points (x, y) de $\mathcal{D}$ qui vérifient à la fois les inégalités

$$x + y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x + 7y \leqslant 3.$$

   Représenter $\mathcal{D}_1$; contient-elle C ?
   Calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.
3. Par des considérations d'aires, déterminer (sans calcul de primitive) une valeur exacte ou approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

PROBLÈME

Partie A

On désigne par e la base des logarithmes népériens, et par φ l'application numérique définie par

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{2t} + t^2 + t.$$

1. Exprimer les fonctions dérivées première φ' et seconde φ'' de la fonction φ.
   Quel est le signe de φ'' ?
   Montrer, par l'étude des variations de φ', que l'équation $\varphi'(t) = 0$ possède une racine unique t_0.
   Vérifier que t_0 appartient à l'intervalle $]-0,74\ ;\ -0,72[$.
   (*Indications numériques* : $0,227 < \mathrm{e}^{-1,48} < 0,228$ et $0,236 < \mathrm{e}^{-1,44} < 0,237$.)
2. Montrer l'égalité $\varphi(t_0) = t_0^2 - \dfrac{1}{2}$.
   Quel est le signe de $\varphi(t_0)$?
   Étudier sommairement la variation de φ.
   Quel est le signe de $\varphi(t)$ pour tout réel t ?
3. Soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{I}},\ \overrightarrow{\mathrm{J}}\right)$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien, et $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ la fonction vectorielle définie par

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{\mathrm{F}}(t) = \mathrm{e}^{t - \frac{t^2}{2}}\overrightarrow{\mathrm{I}} + t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\overrightarrow{\mathrm{J}}.$$

   Étudier les variations du carré de la norme

$$G(t) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)\right\|^2.$$

   (G' désignant la dérivée de G, on mettra $G'(t)$ sous la forme d'un produit de facteurs dont l'un est $\varphi(t)$.)
   Discuter l'équation $\left\|\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)\right\| = k$ selon la valeur du réel positif k.

Partie B

On considère la famille des fonctions numériques f_λ dépendant du paramètre réel λ, définies par

$$f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(\mathrm{e}^x - \lambda x\right).$$

La représentation graphique (repère orthonormé) de f_λ est une courbe $\mathscr{C}_\lambda$.
On conseille de disposer tous les graphes sur une même figure.

1. Étudier les variations de f_0 et tracer $\mathscr{C}_0$ (correspondant à $\lambda = 0$).
2. Démontrer que $\mathrm{e}^x - 1 - x$ est positif ou nul pour tout x réel.
   Étudier les variations de f_1 et tracer $\mathscr{C}_1$ (correspondant à $\lambda = 1$).
3. Préciser, selon la valeur de λ, les variations de f_λ et l'allure de $\mathscr{C}_\lambda$. (On aura d'abord à discuter, par toutes méthodes convenables, le signe de l'expression $\mathrm{e}^x - \lambda(1 + x)$.)
4. L'ensemble des points des courbes $\mathscr{C}_\lambda$, où la tangente est parallèle à Ox et dont l'abscisse n'est pas 1 est inclus dans une courbe $\mathscr{L}$ dont on formera l'équation $y = g(x)$.
   Étudier les variations de g et tracer $\mathscr{L}$.