

↻ Baccalauréat Groupe I¹ septembre 1966 ↻
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Les nombres qui entrent en jeu sont des entiers positifs.

1. Soit $n = 200 = 2^3 \times 5^2$.

Calculer le nombre, N , de ses diviseurs (y compris 1 et n) et les classer par ordre de grandeur croissante.

Calculer le produit, P , de ces diviseurs et vérifier la relation

$$(1) \quad n^N = P^2,$$

2. Calculer N et P pour $n = 2^\alpha \times 5^\beta$.

La relation (1) est-elle encore vraie?

3. Trouver n , de la forme $2^\alpha \times 5^\beta$, sachant que $P = 20^{42}$.

II.

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction z de la variable réelle x , définie par la relation

$$z = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

(On ne demande pas de tracer son graphe.)

- b. En déduire le sens de variation de la fonction y de la variable réelle x , définie par la relation

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

et tracer le graphe de cette fonction y relativement à un repère orthonormé, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

- c. Dans quelles régions du plan le point M de coordonnées cartésiennes x et y doit-il se trouver pour que l'on ait

$$x^2 y^2 + y^2 - x^2 > 0?$$

2. Soit, relativement au repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$,

— A le point de coordonnées $x = 1$, $y = 0$;

1. Algérie, Tunisie, Cameroun, Gabon, Tchad, Congo, République Centrafricaine, Mali, Côte d'Ivoire, Haute-Volta, Niger, Mauritanie, Athenes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, Syrie, Le Caire, Addis-Abbéba, Djibouti.

- F le point (variable) de l'axe $y'Oy$ et d'ordonnée *non nulle* $\overline{OF} = \lambda$;
- (T') le cercle (variable) passant par A, centré sur $y'y$, tangent en A à la droite FA;
- $(\mathcal{H})$ l'hyperbole admettant (Γ) pour cercle principal et dont un foyer est F.

a. Démontrer que $x'x$ est la directrice de $(\mathcal{H})$ relative au foyer F.

Calculer l'excentricité de $(\mathcal{H})$ en fonction de λ et en déduire que l'équation de $(\mathcal{H})$ rapportée aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ peut s'écrire

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = (\lambda^2 + 1) y^2,$$

ou

$$x^2 - \lambda^2 y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

b. M_0 étant un point de coordonnées x_0, y_0 , on se propose de chercher les hyperboles $(\mathcal{H})$ passant par M_0 .

Étudier d'abord, géométriquement ou par le calcul, les cas particuliers suivants :

- i. M_0 est situé sur la droite $y'y$. Discuter.
- ii. M_0 a pour ordonnée $y_0 = 1$ (x_0 arbitraire); démontrer que l'on a alors $FA = FM_0$.

Puis on étudiera le cas général : où faut-il placer M_0 pour qu'il passe deux hyperboles $(\mathcal{H})$ par M_0 ?

Démontrer que, M_0 étant ainsi choisi, les points A et M_0 sont conjugués par rapport au cercle centré sur la droite AM_0 et qui coupe $y'y$ aux deux foyers correspondants.

3. a. On appelle B le symétrique de F par rapport à A et P le point de contact (autre que A) de la deuxième tangente issue de B à (Γ) .

Déterminer le lieu du point P lorsque λ varie.

b. La droite BP et la médiatrice du segment FB se coupent en Q.

Démontrer que le cercle passant par Q et A et centré sur $y'y$ est tangent en Q à la perpendiculaire tracée de Q à $x'x$?

En déduire l'équation du lieu de Q lorsque λ varie; le construire et le reconnaître.