Baccalauréat mathématiques élémentaires
Groupe I [1] septembre 1964

EXERCICE 1

On donne un repère orthonormé xOy ; l'unité de longueur est 2 cm.

1. Reconnaître géométriquement et construire la courbe d'équation

$$y = \sqrt{x.|x-1|},$$

où $|x-1|$ représente la valeur absolue du nombre $x-1$.

2. Soit m un nombre positif donné ; discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des racines réelles de l'équation

$$\sqrt{x.|x-1|} - m = 0.$$

Résoudre cette équation pour

$$m = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

On donne un cercle Γ, de centre O et de rayon R, ainsi qu'un point fixe, G, tel que

$$\text{OG} = kR, \quad k\,\text{donné}, \quad 0 < k < \frac{1}{3}.$$

1. On appelle T tout triangle ABC inscrit dans Γ et ayant G pour centre de gravité.
   - **a.** Construire le triangle T lorsqu'on en donne un sommet A.
   - **b.** Préciser, lorsque A décrit Γ, le lieu γ du milieu A′ de BC et sa position par rapport à Γ.
   - **c.** Montrer que tous les triangles T ont le même orthocentre H et qu'ils ont leurs angles tous aigus.
2. On appelle t tout triangle ABC inscrit dans Γ ; son centre de gravité, g, peut varier alors avec t et n'est plus, d'ordinaire, G.
   - **a.** Établir les relations

$$3\text{O}g^2 + g\text{A}^2 + g\text{B}^2 + g\text{C}^2 = 3\text{R}^2,$$
$$\text{BC}^2 + \text{CA}^2 + \text{AB}^2 = 9\left(\text{R}^2 - \text{O}g^2\right).$$

   - **b.** On désigne, dans la suite, par A, B, C les mesures des angles du triangle ABC. Déduire des relations précédentes quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir

$$\sin^2 \text{A} + \sin^2 \text{B} + \sin^2 \text{C}$$

pour que le triangle t soit égal à un triangle T.

3. Dans un triangle t, on donne l'angle A $\left(0 < A < \frac{\pi}{2}\right)$ et l'on suppose B $\leqslant$ C.

[1] Algérie, Tunisie, Cameroun, Togo, Gabon, Tchad, Congo, Athènes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, etc.

a. B peut alors varier sur un intervalle $\mathscr{J}$, dont on précisera les bornes en fonction de A.

Montrer que le triangle t est égal à un triangle T si, et seulement si, l'angle B appartient à l'intervalle $\mathscr{J}$ et satisfait à la condition

$$1+\sin^2 \mathrm{A} - \cos \mathrm{A} \cos(2\mathrm{B}+\mathrm{A}) = \frac{9}{4}\left(1-k^2\right).$$

b. Étudier la variation de la fonction y de la variable x définie par

$$y = 1+\sin^2 \mathrm{A} - \cos \mathrm{A} \cos(2x+\mathrm{A}),$$

lorsque x appartient à l'intervalle $\mathscr{J}$.

En déduire que les triangles T ont leurs trois angles compris entre deux valeurs, dont on déterminera les cosinus en fonction de k.

À quels triangles T correspondent les valeurs extrémales ?