

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Groupe 1 septembre 1985 ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, et G l'isobarycentre des points A, B, C.

1. Soit G' le symétrique de G par rapport à la droite BC.
Déterminer des nombres réels b et c pour que G' soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1, b , c ?
2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Vérifier que les points B et C appartiennent à E.

EXERCICE 2

6 points

On se propose d'étudier le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par la relation :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

1. Justifier l'encadrement, valable pour $n \geq 1$

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3}}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Prouver que $\frac{S_n}{n^{\frac{1}{3}}}$ admet une limite finie a que l'on déterminera.

3. On pose $u_n = S_n - an^{\frac{1}{3}}$.
En utilisant les encadrements précédents, montrer que la suite (u_n) est bornée et décroissante.
Prouver enfin que cette suite est convergente.

EXERCICE 3

9 points

Partie A

Soit f la fonction qui, à tout nombre réel x différent de -2 associe x

$$f(x) = \frac{x}{2+x},$$

et C la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminer des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x différent de -2

$$f(x) = a + \frac{b}{2+x}$$

2. En déduire la nature géométrique de C , préciser ses éléments de symétrie et construire C .
3. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -3$.
4. On appelle A, B, O' , les points de coordonnées respectives $(-1; -1), (-4; 2), (-3; 3)$.
Évaluer l'aire S du domaine $OABO'$ délimité par les droite OO' et AB et par C .

Partie B

À tout nombre complexe z différent de -2 , on associe

$$z' = \frac{z}{2+z}.$$

1. Montrer que cette application est une bijection de $\mathbb{C} - \{-2\}$ sur un ensemble E que l'on précisera.
2. Soit A le point d'affixe -2 et F l'application qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$.
- Calculer x' et y' en fonction de x et y .
 - Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels z' est réel.
 - Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels la partie réelle x' de z est nulle.
3.
 - Quelle relation y a-t-il entre les modules et les arguments de $z' - 1$ et $z + 2$?
 - Déterminer l'image C'_r par F du cercle C_r de centre A et de rayon r , où $r > 0$.
 - Déterminer l'image D'_α par F de la droite D_α passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$, privée de A .
 - Dessiner sur une même figure les cercles C_1, C_2, C_3 et les droites $D_0, D_{\frac{\pi}{4}}, D_{\frac{\pi}{2}}, D_{\frac{3\pi}{4}}$.
Dessiner sur une autre figure les transformées par F de ces cercles et de ces droites.

Les parties A et B sont indépendantes.