Baccalauréat S groupe 2 bis [1] juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.
   b. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages.
2. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.
3. n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.
   a. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n.
   b. Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n.

EXERCICE 2 (OBLIGATOIRE) **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, (unité graphique 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{\text{i} - z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2. Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
   Montrer que :
   $$x' = \frac{-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)}{x^2 + (1-y)^2}$$
   En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble $\mathscr{F}$.
4. Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. M' est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
   Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
   Montrer que G est situé sur un cercle un centre O dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $\left(\overrightarrow{u},~\overrightarrow{\text{OG}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u},~\overrightarrow{\text{A}M}\right)$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M'.

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes, Nantes, Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le plan complexe P est muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 1 cm pour unité de longueur.
On considère le point J de coordonnées $\left(2\sqrt{3}~;~6\right)$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [OJ]. On note I son centre.
Les points A, de coordonnées $\left(2\sqrt{3}~;~0\right)$, et B, de coordonnées $(0~;~6)$, sont les projetés orthogonaux de J, respectivement sur les axes $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u}\right)$ et $\left(\mathrm{O}~;~\vec{v}\right)$. On remarquera que le cercle $(\mathscr{C})$ est circonscrit au rectangle OAJB.

1. Soit S la similitude directe de centre O transformant B en A.
   - **a.** Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.
   - **b.** Déterminer les images I$'$, J$'$, A$'$ des points I, J et A par la similitude S.
   - **c.** Soit M un point quelconque du cercle $(\mathscr{C})$, et M' son image par la similitude S.
     Quel est l'ensemble $(\mathscr{C}')$ décrit par M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$?
     Représenter $(\mathscr{C}')$ puis démontrer que, quel que soit le point M du cercle $(\mathscr{C})$, les points M, A et M? sont alignés.
2. Soit Ω le point de coordonnées $\left(4+2\sqrt{3}~;~2\right)$.
   On considère la rotation R de centre Ω et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
   - **a.** Montrer que J est l'image de J$'$ par R.
   - **b.** Pour tout point M du plan P, on note M' son image par S et M'' l'image de M' par R. Déterminer l'image de J par la transformation $R \circ S$ (composée de R et de S), puis une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{J}M},~\overrightarrow{\mathrm{J}M''}\right)$, où M est distinct de J .
   - **c.** Montrer que $\mathrm{J}M = \mathrm{J}M''$. En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{J}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}M''}$, et conclure quant à la nature de la transformation $R \circ S$.

Problème **11 points**

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Étude d'une fonction *g*

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $\left(O;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1~;~\mathrm{e}]$, on a :
   $$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$
   On ne demande pas de représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
4. **a.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^e (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$$

b. Soit Δ le domaine plan défini par :

$$\Delta = \left\{M\left(x\,;\,y\right);1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\right\}$$

Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie II : Étude d'une fonction f.

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.
2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie III : Étude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

2. Soit h la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

a. Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b. Étudier le sens de variation de h.

c. On pose $I = [3,4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x) \in I$ et

$$\left|h'(x)\right| \leqslant \frac{5}{6}$$

3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{et pour tout } n \geqslant 0\ u_{n+1} = h(u_n)$$

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a. Pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$$

b. Pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c. La suite (u_n) converge vers α.

4. Donner un entier naturel p, tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.