

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat C Groupe I<sup>1</sup> septembre 1969 ∞

### EXERCICE 1

Deux entiers naturels  $a$  et  $b$  sont tels que  $ab \equiv 1 \pmod{6}$ .

Montrer que  $a$  et  $b$  vérifient l'un ou l'autre des deux systèmes de congruences (mod 6) suivants :

- soit  $a \equiv 1$  et  $b \equiv 1$ ,
- soit  $a \equiv 5$  et  $b \equiv 5$ .

### EXERCICE 2

La notation  $\text{Log}$  désigne les logarithmes népériens,  $e$  est la base de ces logarithmes.

1. Étudier, dans son intervalle de définition, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \text{Log} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. Construire la courbe représentative, (C), rapportée à un repère orthonormé. Montrer que la droite (D) d'équation

$$y = x - \text{Log} 2$$

est asymptote à (C) et préciser la position relative de (C) et (D).

3. Calculer avec une erreur absolue inférieure à 0,000 1 l'abscisse du point où (C) coupe l'axe des abscisses et la pente de la tangente en ce point.

### PROBLÈME

Le plan (II) est muni d'un repère orthonormé.

A chacun de ses points est associé son affixe, que l'on choisira sous forme algébrique ou trigonométrique.

#### Partie A

Les données étant deux nombres complexes  $a$  et  $b$ , on se propose de résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(1) \quad z = a\bar{z} + b,$$

où  $\bar{z}$  est le nombre complexe conjugué de  $z$ .

On pose

$$\begin{aligned} z &= x + iy = p(\cos\theta + i\sin\theta), \\ a &= p + iq = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \\ b &= u + iv = s(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

et l'on désigne par M, A et B les images respectives de  $z$ ,  $a$  et  $b$  dans (II).

1. Former un système donnant des conditions nécessaires et suffisantes liant  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $u$  et  $v$  pour que (1) soit satisfaite.
2. À quel ensemble, E, le point A doit-il appartenir pour que ce système ait une solution unique ?

On désignera par  $\Gamma$  le complémentaire de E dans (II).

---

1. Le groupe I comprend la plupart des centres du Bassin méditerranéen.

3. On suppose que  $A$  appartient à  $E$ ; résoudre (1) et montrer que sa solution,  $\zeta$ , peut s'exprimer uniquement avec les symboles  $a, \bar{a}, b$  et  $\bar{b}$ .
4. On suppose que  $A$  appartient à  $\Gamma$ ; on définira alors  $a$  par son argument.
  - a.  $A$  étant choisi, à quel ensemble  $F_\alpha$  le point  $B$  doit-il appartenir pour que (1) ait une infinité de solutions?
  - b.  $A$  et  $B$  étant choisis de façon que (1) ait une infinité de solutions, déterminer l'ensemble des images  $M$  de ces solutions.

### Partie B

Les données sont deux nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  d'images respectives  $P$  et  $Q$ .  
On se propose d'étudier la transformation ponctuelle  $\mathcal{T}$  définie par

$$(2) \quad Z = \frac{z - \lambda}{z - \mu}$$

qui, à  $m(z)$ , associe  $M(Z)$ .

On suppose  $\lambda \neq \mu$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $\mathcal{T}$ ?
2. Étudier l'ensemble des antécédents par  $\mathcal{T}$  d'un point  $M$  donné.
  - a. Montrer que, si  $M$  n'appartient pas à une courbe  $(\Gamma)$ , que l'on déterminera, il possède un antécédent unique.
  - b. Montrer que l'ensemble des points  $m$  dont les transformés appartiennent à  $(\Gamma)$  est une droite  $\Delta$ , qu'on déterminera.  
Déterminer  $\mathcal{T}(\Delta)$ .
3. Montrer que les images réciproques par  $\mathcal{T}$  des cercles de centre  $O$  appartiennent à un faisceau linéaire de cercles, que l'on caractérisera.