# ∽ Baccalauréat Groupe I [1] septembre 1966 ∽
# série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

**EXERCICE 1**

Les nombres qui entrent en jeu sont des entiers positifs.

1. Soit $n = 200 = 2^3 \times 5^2$.
   Calculer le nombre, $N$, de ses diviseurs (y compris 1 et $n$) et les classer par ordre de grandeur croissante.
   Calculer le produit, $P$, de ces diviseurs et vérifier la relation

$$(1) \qquad n^N = P^2,$$

2. Calculer $N$ et $P$ pour $n = 2^\alpha \times 5^\beta$.
   La relation (1) est-elle encore vraie ?
3. Trouver $n$, de la forme $2^\alpha \times 5^\beta$, sachant que $P = 20^{42}$.

**II.**

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $z$ de la variable reelle $x$, definie par la relation

$$z = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

   (On ne demande. pas de tracer son graphe.)

   **b.** En deduire le sens de variation de la fonction $y$ de la variable reelle $x$, definie par la relation

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   et tracer le graphe de cette fonction $y$ relativement à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

   **c.** Dans quelles régions du plan le point M de coordonnées cartésiennes $x$ et $y$ doit-il se trouver pour que l'on ait

$$x^2y^2 + y^2 - x^2 > 0?$$

2. Soit, relativement au repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$,
   — A le point de coordonnées $x = 1,\ y = 0$ ;
   — F le point (variable) de l'axe $y'\text{O}y$ et d'ordonnée *non nulle* $\overline{\text{OF}} = \lambda$ ;
   — $(\text{T}')$ le cercle (variable) passant par A, centré sur $y'y$, tangent en A à la droite FA ;
   — $(\mathscr{H})$ l'hyperbole admettant $(\Gamma)$ pour cercle principal et dont un foyer est F.

1. Algérie, Tunisie, Cameroun, Gabon, Tchad, Congo, République Centrafricaine, Mali, Côte d'Ivoire, Haute-Volta, Niger, Mauritanie, Athenes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, Syrie, Le Caire, Addis-Abbeba, Djibouti.

**a.** Démontrer que $x'x$ est la directrice de $(\mathscr{H})$ relative au foyer F.

Calculer l'excentricité de $(\mathscr{H})$ en fonction de $\lambda$ et en déduire que l'équation de $(\mathscr{H})$ rapportée aux axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ peut s'écrire

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = \left(\lambda^2 + 1\right) y^2,$$

ou

$$x^2 - \lambda^2 y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

**b.** $\text{M}_0$ étant un point de coordonnées $x_0$, $y_0$, on se propose de chercher les hyperboles $(\mathscr{H})$ passant par $\text{M}_0$.

Étudier d'abord, géométriquement ou par le calcul, les cas particuliers suivants :

i. $\text{M}_0$ est situé sur la droite $y'y$. Discuter.

ii. $\text{M}_0$ a pour ordonnée $y_0 = 1$ ($x_0$ arbitraire) ; démontrer que l'on a alors $\text{FA} = \text{FM}_0$.

Puis on étudiera le cas général : où faut-il placer $\text{M}_0$ pour qu'il passe deux hyperboles $(\mathscr{H})$ par $\text{M}_0$ ?

Démontrer que, $\text{M}_0$ étant ainsi choisi, les points A et $\text{M}_0$ sont conjugués par rapport au cercle centré sur la droite $\text{AM}_0$ et qui coupe $y'y$ aux deux foyers correspondants.

**3. a.** On appelle B le symétrique de F par rapport à A et P le point de contact (autre que A) de la deuxième tangente issue de B à $(\Gamma)$.

Déterminer le lieu du point P lorsque À varie.

**b.** La droite BP et la médiatrice du segment FB se coupent en Q.

Démontrer que le cercle passant par Q et A et centré sur $y'y$ est tangent en Q à la perpendiculaire tracée de Q à $x'x$?

En déduire l'équation du lieu de Q lorsque $\lambda$ varie ; le construire et le reconnaître.