Baccalauréat Groupe I [1] septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

Dans un repère orthonormé Oxyz, on donne les droites suivantes :
(A), d'équations $x\sin\alpha = Y\cos\alpha$, $z = a$;

(B), d'équations $x\sin\beta = y\cos\beta$, $z = b$;

(C), d'équations $x\sin\gamma = y\cos\gamma$, $z = c$.

Soit $S_{\text{A}},\ S_{\text{B}},\ S_{\text{C}}$ les symétries axiales orthogonales (ou retournements) ayant pour axes respectifs les droites (A), (B), (C).
On fait successivement ces symétries dans l'ordre $S_{\text{A}},\ S_{\text{B}},\ S_{\text{C}}$.
Reconnaitre la transformation-produit, S, et placer ses éléments par rapport aux données.

II.

Déterminer l'ensemble, (E), des réels x qui attribuent une valeur réelle à l'expression

$$(1) \quad y = \sqrt{x^2 - |x|} - x,$$

où $|x|$ est la valeur absolue de x.
Étudier la fonction définie sur (E) par la relation (1) ; construire sa représentation graphique, le repère étant orthonormé.

III.

NOTATIONS - Toutes les lettres représentent des entiers naturels. ab désigne un produit ; $\overline{ab}$ figure l'entier $ax+b$, de *chiffres a* et*b*, dans la numération de base x ; si x dépasse dix, les premiers chiffres après 9 sont notés α (dix), β (onze), $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta$; (quinze), ...
24 (vingt-quatre), *sans trait*, indique l'emploi de la base dix.
DÉFINITION - Soit n un entier, qui s'écrit $n = \overline{ab}$ dans la base x ; on suppose $x \geqslant 3,\ b > a \geqslant 1$; on forme l'entier $n' = \overline{ba}$ (base x) ; si n divise n', on dira que n est un *codiviseur pour la base x*.
Ainsi, sont des *codiviseurs*, respectivement :
$n = 12$ pour la base 7 : $n = \overline{15},\ n' = \overline{51},\ n' = 3n$;
$n = 96$ pour la base 17 : $n = \overline{5\beta},\ n' = \overline{\beta 5},\ n' = 2n$.

PROBLÈME

1. On donne une base x et un codiviseur, $n = \overline{ab}$, pour cette base.
   Il existe, par définition, un entier k tel que

   $$\overline{ba} = \overline{ab} \times k \quad \text{(base } x\text{)};$$

   montrer que k vérifie les inégalités $2 \leqslant k \leqslant x-1$.
   Montrer qu'il existe un entier r tel que $bk = rx + a$, et que r vérifie les inégalités $1 \leqslant r \leqslant k-1$.
   Établir les formules

   $$(1) \quad b = ak + r, \quad x = \left(k^2 - 1\right)\frac{a}{r} + k.$$

1. Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Israël, Italie, Turquie, Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal

2. On donne trois entiers, a, k et r, satisfaisant aux conditions

$$(2) \quad a \geqslant 1,\ k \geqslant 2, 1 \leqslant r \leqslant k-1;$$

r divise $\left(k^2-1\right)a$; les formules (1) leur associent deux entiers, b et x ; a et b sont-ils les chiffres, dans la base x, d'un codiviseur pour cette base ?

3. On donne $a \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. La valeur $r_1 = k-1$ de r vérifie (2) ; soit x_1 la base associée ; écrire x_1+1 sous forme de produit.

Si une *autre* valeur, r_2, de r vérifie (2) et si $x_2 2$ est la base associée, montrer qu'on a $x_2 > x_1$ et que x_2+1 n'est pas premier avec $k+1$.

Choisir $a_0,\ k_0,\ r_0$ pour rendre minimale la base x_0 associée.

4. La donnée est désormais celle d'une base $x\ \ (x \geqslant x_0)$.

Dans le cas où $x+1 = uv,\ \ u \geqslant 3,\ v \geqslant 2$, mettre en évidence un codiviseur pour la base x et l'évaluer au moyen de u et v.

Exprimer, par une propriété caractéristique de $x+1$, qu'il n'existe aucun codiviseur pour une base donnée x.

Trouver tous les codiviseurs pour la base $x = 17$ (les résultats acquis permettent une recherche méthodique et rapide).

Pourquoi 16 divise-t-il trois des codiviseurs obtenus ?