**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C septembre 1984 Guyane

### EXERCICE 1

Dans le plan affine euclidien P, on considère un triangle isocèle ABC de sommet A tel que AB = AC = $3a$ et BC = $2a$ ($a$ étant un réel strictement positif).
On appelle G le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 3 et 3.
Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

1. Montrer que G est le milieu de [IJ].
2. $M$ étant un point de P, calculer $2M\mathrm{A}^2 + 3M\mathrm{B}^2 + 3M\mathrm{C}^2$ en fonction de $M\mathrm{G}$ et de $a$.
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ de P tels que

$$2M\mathrm{A}^2 + 3M\mathrm{B}^2 + 3M\mathrm{C}^2 = 18a^2.$$

4. Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que

$$2M\mathrm{A}^2 + 3M\mathrm{B}^2 + 3M\mathrm{C}^2 = 22a^2.$$

5. Démontrer que les droites (BC), (AB) et (AC) ont, chacune, un unique point commun avec E.
Que représente le point G pour le triangle ABC ?

### EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, (unité 1 cm) on considère les courbes $C$ et $C'$ d?équations respectives :

$$\begin{array}{ll} C: & 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0 \\ C': & 16x^2 + 49y^2 - 16x + 294y + 261 = 0 \end{array}$$

1. Trouver les équations réduites des deux courbes. Préciser leur nature et vérifier qu'elles ont le même centre.
2. Trouver les éléments remarquables de $C$ et $C'$ (sommets, foyers, directrices, asymptotes éventuelles).
3. Tracer $C$ et $C'$.

### PROBLÈME

**Partie A**

1. Étudier les variations de l'application $g$ de l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1).$$

En déduire que pour tout $x$ réel strictement supérieur à $-1$, $g(x) < 0$.

2. Soit $f$ l'application de l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1 & \text{si } x = 0. \end{array}\right.$$

**a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.

**b.** Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2cm).

**Partie B**

On désigne par E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

où $a, b, c, d$ sont des nombres entiers positifs vérifiant $|ad - bc| = 1$.
Soit $F$ un élément de E.

**1.** Montrer que, pour tout $x$ réel strictement positif :

$$F(x) \in \left]\frac{a}{c}\,;\,\frac{b}{d}\right[ \quad \text{ou} \quad F(x) \in \left]\frac{b}{d}\,;\,\frac{a}{c}\right[$$

et que

$$\left|F(x) - \frac{a}{c}\right| \leqslant \frac{1}{cd}, \quad \left|F(x) - \frac{b}{d}\right| \leqslant \frac{1}{cd}.$$

**2.** Pour tout $x$ réel strictement positif, on considère

$$m(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left|F(t) - \frac{a}{c}\right| \,\mathrm{d}t.$$

**a.** Montrer que $0 \leqslant m(x) \leqslant \dfrac{1}{cd}$.

**b.** Calculer $m(x)$.

**c.** Reconnaître $m$ dans le cas où $c = d = 1$.

**Partie B**

On considère la fonction $R$ définie pour tout $x$ strictement positif par

$$R(x) = \frac{x+1}{x}.$$

On pose $F_1 = R \circ R$ et pour tout entier $n$ non nul $F_{n+1} = F_n \circ R$.

**1. a.** Exprimer $F_1(x)$ en fonction de $x$.

**b.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul $F_n(x)$ s'écrit sous la forme :

$$F_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}.$$

où $a_n, b_n, c_n, d_n$ sont des entiers naturels strictement positifs, termes généraux de suites définies sur $\mathbb{N}^\star$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{n+1} = a_n + b_n, & b_{n+1} = a_n, \\ c_{n+1} = c_n + d_n, & d_{n+1} = c_n. \end{array}\right.$$

**c.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $F_n$ appartient à E.

**2.** On note $I_n$ l'intervalle ouvert d'extrémités $\dfrac{a_n}{c_n}$ et $\dfrac{b_n}{d_n}$.

**3.** **a.** Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel $n$ non nul, $c_n > n$.

En déduire que la longueur de $I_n$, $\left[\dfrac{a_n}{c_n} - \dfrac{b_n}{d_n}\right]$, tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** Montrer que la suite $(c_n d_n)$, définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ est croissante et trouver un entier $n$ tel que

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - \frac{b_n}{d_n}\right| < 10^{-3}.$$

**4.** Déterminer le réel positif $\Phi$ tel que $R(\Phi) = \Phi$.

Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a

$$\Phi = F_n(\Phi).$$

En utilisant la question B 1., montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $\Phi$ élément de $I_n$.

**N. B.** : dans tout le problème, les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle $x$.
ln désigne la fonction logarithme népérien.