Un maximum … sans dériver

Henri Bareil(*)

Dans la Maxi-Olympiades Belge 2006, figurait un problème dont voici un extrait :

« *Soit deux réels positifs x et y tels que* $y = 2 - x$.

Quelle est la valeur maximale de $f(x,y)$ *telle que* $f(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2)$ *?* »

Le n° 160 de la revue « Mathématique et Pédagogie » de nos amis belges (Cf. Plaquette « Visages… ») en propose une solution classique exprimant $f(x,y)$ en fonction de x puis dérivant par rapport à x.

✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧

Voici une autre réflexion, fondée sur la classique : « *Le produit xy de deux nombres de somme constante est maximal quand ces deux nombres sont égaux* (ou s'en approchent le plus possible) », théorème utilisable ici puisque $x + y = 2$.

Mais que se passe-t-il pour $x^2 + y^2$ *?*

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2xy$.
Et $x^2 + y^2$ est minimale lorsque xy est maximal.
Nous voilà donc, pour $f(x,y)$ face à une *indétermination* : quand le premier facteur est maximal, le second est minimal ! *Qui l'emporte ?*

Du fait que $x + y = 2$, pour exploiter la symétrie de x et y, situons x et y par rapport à 1, par $x = 1 - a$ et $y = 1 + a$ (avec $a \leq 1$ puisque x est positif). $f(x,y)$ devient, dès lors, $g(a)$ telle que

$$\begin{aligned} g(a) &= (1-a^2)^2\left[4-2(1-a^2)\right] \\ &= 2(1-a^2)^2\left[2-(1-a^2)\right] \\ &= 2(1-a^2)^2(1+a^2) \\ &= 2(1-a^2)(1+a^2)(1-a^2) \\ &= 2(1-a^4)(1-a^2) \end{aligned}$$

Comme $a \leq 1$, *chaque facteur est maximal pour* $a = 0$.
Leur produit aussi, égal à 2. *Tel est le maimum de* $f(x,y)$.

Remarque 1 : sans la restriction « x et y positifs », on n'a plus a entre -1 et 1. Dès lors les facteurs $(1-a^4)$ et $(1-a^2)$ peuvent prendre des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut et leur produit est positif, aussi grand que l'on veut…

(*) Institut du Lauragais.

Remarque 2 : Proposer, dans l'énoncé, $y = 2 - x$ dissimule la symétrie entre x et y. Était-ce raisonnable ?

Remarque 3 (additif de Bruno ALAPLANTIVE, avec établissement d'une conjecture grâce à un tableur) :
Il me semble qu'une indication d'utilisation d'un tableur permettrait de situer la question dans le cadre d'une recherche du genre TP (si cela finit par arriver au bac, il faudra bien qu'on y entraîne les élèves !). Du tableau il ressort que $x = 1$ est candidat. Alors pour montrer que c'est effectivement la solution il est naturel de se positionner par rapport à ce 1.
Ainsi le $x = 1 - a$ n'est-il plus le tour de passe-passe du prof expérimenté… (expérimenté, expérience, TP, prof, élève). Et de toute façon, poser $x = 1 - a$ n'a de sens que si l'on suppose que 1 est la solution.
À noter en outre, que le tableau permet certainement à un élève de mieux adhérer à « quand le premier est maximal, le second est minimal ».

x	y	x^2y^2	$x^2 + y^2$	$x^2 y^2 (x^2 + y^2)$
0	2	0	4	0
0,1	1,9	0,0361	3,62	0,130682
0,2	1,8	0,1296	3,28	0,425088
0,3	1,7	0,2601	2,98	0,775098
0,4	1,6	0,4096	2,72	1,114112
0,5	1,5	0,5625	2,5	1,40625
0,6	1,4	0,7056	2,32	1,636992
0,7	1,3	0,8281	2,18	1,805258
0,8	1,2	0,9216	2,08	1,916928
0,9	1,1	0,9801	2,02	1,979802
1	1	1	2	2
1,1	0,9	0,9801	2,02	1,979802
1,2	0,8	0,9216	2,08	1,916928
1,3	0,7	0,8281	2,18	1,805258
1,4	0,6	0,7056	2,32	1,636992
1,5	0,5	0,5625	2,5	1,40625
1,6	0,4	0,4096	2,72	1,114112
1,7	0,3	0,2601	2,98	0,775098
1,8	0,2	0,1296	3,28	0,425088
1,9	0,1	0,0361	3,62	0,130682
2	0	0	4	0

Remarque 4 : Daniel REISZ propose une jolie visualisation, réalisée par Michel FRÉCHET sur le site APMEP :
En géométrie 3D apparaît la surface

$$z = x^2 y^2 \left(x^2 + y^2\right)$$

et son intersection avec le plan

$$x + y = 2,\ x \text{ et } y \text{ positifs}$$

(en réalité il n'y a qu'une bande).
D'où la visualisation de la solution.