

Une invention française du XX^e siècle :

le théorème de Thalès

Henry PLANE

En Droit, celui qui découvre un objet non réclamé en est dit l'inventeur. Les enseignants français, du début du XX^e siècle semblent donc être inventeurs...

Pour notre tradition occidentale, les mathématiques sont dites nées au VI^e siècle avant notre ère lorsque, à partir d'un ensemble de résolutions de problèmes pratiques s'est édifié un corps de réflexions abstraites. Certes, tout le patrimoine d'alors, au Moyen Orient, en étant adopté par la Grèce n'a pas totalement suivi cette transformation. A côté de la «Géométrie à philosophe» demeure une «Géométrie intéressée» dans les entreprises de la science, dans la vie. Notre théorème vit de ces deux géométries.

C'est le nom de Thalès que l'histoire associe le premier à cette transformation et, lorsque la notion de proportion est mise en avant, l'élève du XX^e siècle évoque, en France, un certain théorème et l'homme de Milet.

Mais de l'œuvre de THALES, que savons-nous ?

Nous ne disposons que de témoignages sur le personnage et sur ses travaux. PLUTARQUE dans «le banquet des sept sages» rapporte l'exploit de la mesure d'une pyramide à l'aide d'un bâton et des ombres. Mais exploit de qui ? de THALES ou des Egyptiens chez qui il avait été étudier ? De plus, ce témoignage du début du II^e siècle qu'on trouve chez PLINE à peu près à la même époque, est incomplet. HIÉRONYME DE RHODES (- IV^e siècle), contemporain de Platon, précise, lui, que l'opération se faisait lorsque «*notre ombre nous est égale*». Détail non négligeable qui ajoute un voile d'incertitude sur le rôle joué par «l'école de Milet» dans le chapitre «proportions et paral-

Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

LE SIXIÈME LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE
DÉFINITIONS

I. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont des angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

PROPOSITION PREMIÈRE

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

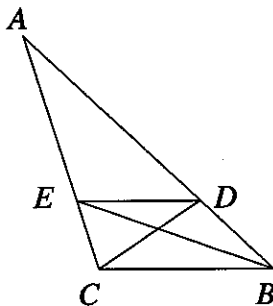
PROPOSITION II.
THÉORÈME

Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Que l'on mène la droite DE (fig. 122) de manière qu'elle soit parallèle à un des côtés du triangle ABC : je dis que CE est à EA comme BD est à DA.

Menez les droites BE, CD.

Le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop.3-1), parce qu'ils ont la même base et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles. Mais deux quantités égales ont la même raison avec une même quantité (prop.5) : donc le triangle CDE est au triangle ADE comme le triangle BDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA : car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la base AB, sont entr'eux comme leurs bases (prop.1.6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA : donc BD est à DA comme CE est à EA (prop. II.5).



PROPOSITION III.
THÉORÈME

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les autres côtés de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite qui est menée du sommet de la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle ABC (fig.125), que l'angle BAC soit partagé en deux parties égales par la droite AD : je dis que BD est à DC comme BA est à AC.

lèles» et conduirait à s'en tenir à EUDOXE de CNIDE (– IV^e siècle) comme initiateur de ce chapitre.

Quant à PAPPUS (IV^e siècle) et PROCLUS (V^e siècle), quels théorèmes attribuent-ils à THALES ?

- Le diamètre partage le cercle en deux parties égales,
- Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux,
- Les angles opposés par le sommet sont égaux,
- Un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Alors, pour cette recherche de paternité, fouillons un peu le passé.

Comment EUCLIDE (fin – IV^e siècle) aborde-t-il le sujet ?

Après étude des rapports de grandeurs, c'est au Livre VI qu'on trouve sa définition et les proportions qui nous intéressent. - *Documents 1 et 2* - (on a utilisé les deux traductions de PEYRARD, celle de 1804 offre l'avantage d'user de l'alphabet latin). Dans la définition, on soulignera le «*et dont les côtés...*» On notera aussi que la proposition 2 comporte la réciproque et on notera surtout sa démonstration par l'intermédiaire d'un *rapport d'aires égal à un rapport de longueurs de segments*, pour user de notre terminologie.

Il est enfin à signaler que cette propriété n'est pas spécialement mise à part dans ce livre IV. La suivent immédiatement : la propriété du pied de la bissectrice, ce que nous nommons les cas de similitude des triangles, et l'étude du triangle rectangle coupé par sa hauteur en deux triangles qui lui sont semblables et ce, avec l'apparition de moyennes proportionnelles.

La proposition 10 - *Document 3* - est un problème. Sous ce vocable, il s'agit toujours de constructions, problème pratique donc géométrie «intéressée» et non «à philosophe».

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée qui n'est point partagée de la même manière qu'une autre droite donnée est partagée.

Soit AB (fig.150) la droite donnée qui n'est point partagée et AC la droite donnée qui est partagée : il faut partager la droite AB qui n'est pas partagée de la même manière que la droite AC est partagée.

Que la droite AC soit partagée aux points D, E, et que les droites AC, AB soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque. Conduisez la droite BC, et par les points D, E, conduisez les droites DF, EG parallèles à la droite BC (prop.51.), et par le point D conduisez la droite DHK parallèle à la droite AB.

Les figures FH, HB sont des parallélogrammes, et par conséquent la droite DH est égale à la droite FG et la

droite HK égale à la droite GB (prop.54.); et puisqu'on a conduit la droite HE parallèle à un des côtés du triangle DKC, savoir, au côté KC, la droite CE sera à la droite ED comme la droite KH est à la droite HD (prop.2.6) ; mais puisque la droite KH est égale à la droite BG et que la droite HD est égale à la droite GF, la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF. De plus, puisqu'on a conduit la droite FD parallèle à un des côtés du triangle AGE, savoir au côté EG, la droite ED sera à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA. Mais on a démontré que la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF : donc la droite CE est à la droite ED comme la droite BG est à la droite GF, et la droite ED est à la droite DA comme la droite GF est à la droite FA.

Donc la droite donnée AB, qui n'est partagée, a été partagée de la même manière que la droite AC ; ce qu'il fallait faire. (Traduction Peyrard 1804)

Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

En ce qui concerne l'espace, la question sera abordée au livre XI, propriété 17, sous un autre aspect : «*Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées proportionnellement*».

Si CLAVIUS, dans ses célèbres commentaires d'Euclide de 1574 s'arrête sur ce théorème, mais dans le suivi du Grec, la propriété est au milieu d'autres, sans prolongement. - *Document 4* -. Cette propriété sera souvent omise dans nombre d'ouvrages traitant de l'espace.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.
SI duæ rectæ linee parallelæ planis secentur; in eisdem ratione secantur.

RECTAE linee AB, CD, sive in parallela sint, ut in figura, sive no, existat in eodem plano, sive in trisectura polita; in diversis autem planis si secantur planis parallelis EF, G, H, I, X, in punctis L, M, N, O, P, Q, Q. Dico eas secari proportionale liter, hoc est. legitur esse inter dicta plana intercepta esse proportionalia, requirerem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in plano E, F, I, X, & coniungatur recta I, Q, occurrat plano GH in R, puncto, a quo vel puncto S, M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, & erigat utriusque L, N, Q, in uno plano: similiter triangulum L, O, Q, in uno plano. Quoniam vero pia

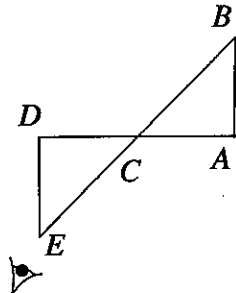
LIBER XI
SCHOLIUM.
QUOD si duæ rectæ ABCD, sive in eodem plano, sive in diversis planis, sive in eodem plano, ut in figura, sive no, existat in eodem plano, sive in trisectura polita; in diversis autem planis si secantur planis parallelis EF, G, H, I, X, in punctis L, M, N, O, P, Q, Q. Dico eas secari proportionale liter, hoc est. legitur esse inter dicta plana intercepta esse proportionalia, requirerem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in plano E, F, I, X, & coniungatur recta I, Q, occurrat plano GH in R, puncto, a quo vel puncto S, M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, & erigat utriusque L, N, Q, in uno plano: similiter triangulum L, O, Q, in uno plano. Quoniam vero pia

CLAVIUS
Edition Rome 1589

Toujours est-il que dans le plan, ce sont les figures semblables qui jouent le grand rôle.

Poursuivons notre quête à la suite des âges.

MARCUS JUNIUS NISIUS, arpenteur romain du Ier siècle, donne le procédé suivant pour mesurer une distance AB lorsque seul le point A peut être atteint. Dans notre style, nous dirions (figure 5) : «sur la perpendiculaire en A à (AB), prendre deux points C et D tels que C soit le milieu de [AD]. Sur la perpendiculaire en D à (AD), déterminer le point E tel que E, C et B



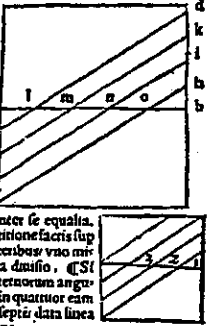
NIPSIUS- Fig.5

Document n°7

CAROLI BOVILLI SAMARORRINI LIBELLVS DE MATHEMATICIS SVPPLEMENTIS AD STVDIOSISSIMVM VIRVM REMYNDVM BOVCHERIVM IVRISPERITVM.

Rectam lineam in quolibet partes equales diuidere.
 ¶ Quo pacto recta linea licet in duo equa partim; demonstrat Euclides. Quo autem modo sit quolibet equalium partium numero; diuidi; nunc hactenus quod nonnisi propositus demonstrauit; nemo. huius ratiō scilicet hanc partem Geometricis conducit disciplina. Nam frequenter in Geometricis demonstrationibus; expectat recte lineae quolibet sectionis angulū. Si igitur recta linea a b in quinq; partes equas diuidenda.

Super puncta a et b; educo in diuersam partē duas perpendiculares; cuiuscūq; quinq; unitas (Nā nisi diuersi debent tamen esse inter se equales) a c et b d. que super lineā a b; creant rectos angulos coarctos et a b et a b d. Partior deinde ambas lineas a c et b d; in quatuor partes equales a e in punctis e f g h i et uo punctis i k. Et duco lineas quatuor; e h i f i l i g g d. quib; opposita linea a b; erit in quinq; parte a equa; a les latera itaq; diuisa in punctis l. m. n. o. ¶ Hinc aut ratiōnā facile collige per lineas equidistantes et coarctos alternos angulos. Erunt enim lineae e h i f i l i g g d. inuicem equidistantes. quare et coarctos anguli qui ab ipsa super lineam a b; in punctis i m n o facti fuerunt equales; et inuicem inter equidistantes lineas e h i f i m n u o et o b; angulorum coarctosorum latera inter se equalia. ¶ Et eodem modo procedet in quilibet recte lineae partitione factis super eam diuisa ex parte rectis angulis coarctis eorūq; lateribus vno numero diuisa equaliter factis; sit proposita linea exposita diuisio. ¶ Si autē diuidenda est proposita linea ternario; partire coarctosorum angulorū perpendicularia super ducta lineā latera binario. Si in quatuor eam partiri volueris; eadē latera in tria sunt partienda. Si in septis; data linea est diuidenda; latera eadem diuide tertio. Et ita deinceps.



Carolus BOVILLUS
 Charles de Bouelle
 ou Bouvelles.
 Né aux environs
 d'Amiens (samaro-
 brina) en 1470.
 Enseigna et mourut à
 Noyon (1553)

Document n° 8

CONSTRUCT. DE DIVERS PROB.

Probleme XLVI.

Comper vne ligne droite donnee en parties, qui soient entr'elles selon vne raison donnee.

Soit la ligne droite donnee AD, qu'il faut couper en deux parties, qui aient telle raison entr'elles que AF a C.

Soit coniciez AF avec AD, faisant l'ang. DAF tel qu'on voudra, & icelle AF, estant prolongée jusqu'au c. E intermicement, soit prise FG, egale a C; & arant ment DG, soit menée FB, parallèle a G D; & elle coupe AD en B, selon la raison de AF à FG, c'est à dire C, comme il est manifeste: ce qui s'il faut faire.

SCHOLIE.

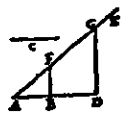

Le mesme se fera aussi avec le compas de prop. transformant la raison donnee sur l'une des jambes, & s'opérant à l'ouverture de l'ouverture d'icelle le ligne AD. Et l'ouverture de l'ouverture de AF, donnera le segment AB.

Probleme XLVII.

D'un angle d'un triangle rectiligne, mener vne ligne droite, qui diuise le triangle selon vne raison donnee.

Soit le triangle donné ABC, & il faut de l'angle B mener vne ligne droite, qui diuise le triangle selon la raison de D à E.

Soit par le prob. preced. coupé AC coté opposé à l'angle B en F, selon la raison de D à E, puis soit menée BF; & icelle diuise le triangle selon le requis: ce qui est manifeste.

i. p. 41

soient alignés (visée optique). Alors $DE = AB$ les angles en C sont égaux».

Ici, on peut se demander pourquoi des perpendiculaires ? Pour nombre de géomètres, deux droites sont parallèles si elles sont perpendiculaires à une même droite.

Plus proche de ce que nous recherchons est le témoignage de FLAVIUS VEGETIUS RENATUS qui, dans son «*Epitome rei militaris*», au début du V^e siècle, donne comment mesurer les hauteurs de murailles dont on ne peut aller qu'au pied. (*Document 6*).

Après une première méthode très pratique, il prescrit : «*Lorsque le soleil oblique projette l'ombre des murailles sur la terre, on mesure la longueur de celle-ci. Simultanément, on plante la perche de 10 pieds et on mesure son ombre. Ce dernier nombre noté, nul ne doute de trouver à partir de l'ombre de la perche la hauteur des murailles dont on sait qu'il en est autant de cette hauteur que de l'ombre*».

Nous dirions que le rapport de la muraille à son ombre est le même que celui de la perche à la sienne. Il est bien question de similitude évidente : «*nemo dubitat*» nul ne doute.

La géométrie dite «faux BOECE» du X^e siècle n'aborde pas ce sujet, non plus que Gerbert — le pape de l'an 1000 - dans ce dont nous disposons de sa correspondance. Mais il lui est attribué plusieurs procédés de mesure à distance comme il en est pour Heron d'Alexandrie (— II^e siècle ?).

Si BOUELLE dans son «*Art pratique de géométrie*» (1509) donne un moyen de partager en n parties un segment de droite, il ne cite pas d'autre nom que celui d'EUCLIDE. Mais peut-être y a-t-il une autre idée dans ce texte. (*Document 7*). Et le «*ita deinceps*» amorce-t-il une récurrence ?

Pour rester dans le domaine des constructions (les «problèmes» des anciens), voyons l'ouvrage de HENRION intitulé : «*La géométrie pratique*» (1623) (*Document 8*). Parmi de nombreux problèmes, le XLVI : «*Couper une ligne droite donnée en parties qui soient entr'elles selon une raison don-*

Mensura autem colligitur duplici modo. Aut enim linum tenue expeditum uno capite necitur in sagitta : quae cum ad muri fastigia directa pervenerit ex mensura lini murorum altitudo deprehenditur. Aut certe, cum sol obliquus umbram turrium murorumque jaculatur in terram, tunc, ignorantibus adversariis umbræ illius spatium mensuratur ; itemque decempeda figuratur ex umbra ipsius similiter mensuratur : quod collecto numero, nemo dubitat ex umbra decempedae inveniri altitudinem civitatis, cum sciatur quanta altitudo quantum umbrae emitat in longum.

VEGECE Ve siècle

Il y a deux façons de mesurer.

Ou bien un peleton de fil est noué par un bout à une flèche. Lorsque celle-ci parvient au droit du haut du mur de la longueur du fil on déduit la hauteur.

Ou bien lorsque le soleil...

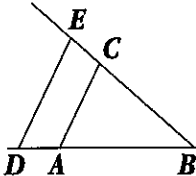
née». B coupe (AD) selon la raison de AF à FG comme il est manifeste. Et de renvoyer aussi pour résoudre au “compas de proportions”. Cet instrument, outil de base jusqu’à la Révolution qui lui, repose, en fait, sur l’égalité des rapports

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \dots \text{ (Document 9)}$$

Et DESCARTES ? En première page de sa “Géométrie” (1637) : «*Comment se font géométriquement la multiplication et la division....Je n’ai qu’à tirer la parallèle*» (Document 10). Pas de démonstration : Élémentaire, mon cher Schooten!

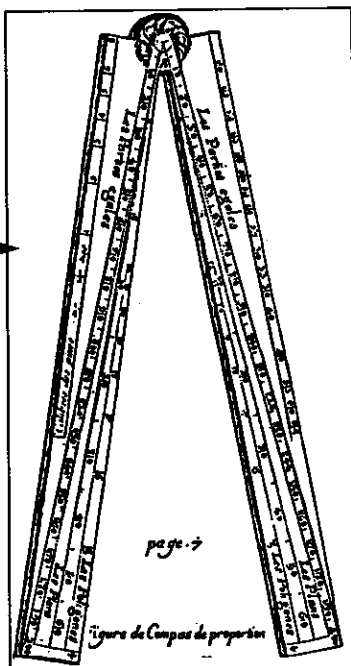
LA GEOMETRIE

Soit par exemple AB l’unité, & qu’il faille multiplier BD par BC, ie n’ay qu’à joindre les points A & C, puis tirer DE parallèle à CA, & BE est le produit de cette Multiplication.



Ou bien s’il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E & D, ie tire AC parallèle à DE, & BC est le produit de cete division

Document 10



XVII^e - XVIII^e siècles, multiplication des ouvrages.


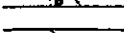





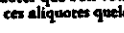
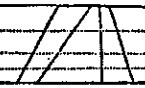
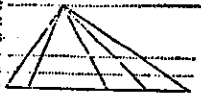
Il y a les fidèles d’EUCLIDE qui respectent son ordonnance : rapport d’aires, figures semblables avec le cas du triangle

coupé par une parallèle à l’un des côtés. On y trouvera les Jésuites, sans doute sur “ordre” du Collège Romain : DESCHALLES - ses “Eléments d’Euclide” (1660) ont souvent été réédités, après révision par OZANAM, jusqu’en 1740 et PARDIES aussi avec sa “méthode courte” (1678 rééditée jusqu’en 1749). Curieusement, DESCHALLES au début de son livre, parle pour mesurer une distance inaccessible et du procédé relevé chez NIPSIUS, et de mesurer en “rapportant un triangle sur papier”...., “avec une échelle proportionnée”, mais sans démonstration. Toujours le balancement entre géométries “intéressée” ou “à philosopher”.

Et les autres ?

Ces "Messieurs de Port Royal", à côté de leur "Logique" et de leur "Grammaire" avaient besoin d'une géométrie. Pascal en avait parlé, un soir, qui maintenant avait des regards d'un autre "ordre"... C'est donc Arnauld (Antoine) qui va publier en 1667, les "Nouveaux éléments de géométrie". C'est un tout autre abord du sujet. Dans la préface, l'auteur écrit qu'il «ne considère pas tant la géométrie que l'usage qu'on en peut faire». Il veut «réduire les pensées à un ordre naturel».

On a alors une nouvelle proposition fondamentale au livre X, qui concerne les lignes proportionnelles (*Document 11 ci-dessous*).

<p>PROPOSITION FONDAMENTALE DES LIGNES PROPORTIONNELLES.</p> <p>LOIS que deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendiculaire sont aussi en même raison.</p> <p>Soient deux espaces A & E.</p> <p>Soient appelées dans l'espace A.  A P G</p> <p>La perpendiculaire,  P.</p> <p>L'oblique,  C.</p> <p>L'éloignement du perpendiculaire B.</p> <p>Et soient de même appelées dans  E P c</p> <p>l'espace,  E.</p> <p>La perpendiculaire  P.</p> <p>L'oblique  c.</p> <p>L'éloignement du perpendiculaire  B. Je dis que</p> <p>$PP : CE :: Bb.$</p> <p>Et en voilà la preuve très naturelle, dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.</p> <p>Soit p divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10, 20, 500, 6000, 10000, &c. & ces aliquotes quelconques de p soient appelées x.</p> <p>Si on tire par tout les points de cette division telle qu'elle soit des parallèles à l'espace A, cet espace sera divisé en autant de petits espaces parallèles qu'x sera dans p, & ces petits espaces seront égaux par le 1^{er} Lemme, parce qu'ils auront tous x pour perpendiculaire.</p> <p>Et de là il s'en suit que C sera aussi divisé en aliquotes parallèles à celles de P, parce que les portions de C, qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étant également inclinées par le 9^o Lemme, y sont égales par le 8.</p>	<p>PREMIER COROLLAIRE.</p> <p>Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la 1^{re}, ou la 2^e, ou la 3^e, &c. comme chaque autre toute à la même partie 1^{re}, ou 2^e, ou 3^e, &c.</p>  <p>C'est une suite manifeste du précédent Theoreme, puisque d'une part toutes les toutes font dans le même espace, qui est l'espace total. Toutes les premières parties dans le 1^{er} espace partiel, les 2^{es} dans le 2^e, & ainsi des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ses parties sont également inclinées chacune dans son espace par le 9^o Lemme. Donc la 1^{re} toute est à sa 1^{re} partie comme la seconde toute à sa 1^{re} partie.</p> <p>SECOND COROLLAIRE.</p> <p>Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle qui les termine.</p>  <p>C'est la même chose que le précédent Corollaire, puisqu'en tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallèle à la ligne qui les termine, elles se trouveront toutes dans le même espace parallèle, & par conséquent les parallèles à cet espace les doivent toutes couper proportionnellement.</p>
--	--

Nouveaux éléments de Géométrie - Livre X.

paru sans nom d'auteur chez Charles Savreux à PARIS M. DC. LXVII

avec privilège du Roy

L'ordre naturel fait traiter des lignes avant d'user des surfaces. On ne s'appuiera pas sur le rapport des secondes pour établir celui des premières. Conséquence : il faut traiter, à ce stade de l'exposé, le cas de la raison (le rapport) lorsqu'elle n'est ni entière ni quotient d'entiers, et souvent les successeurs escamoteront cette question. On use de parties aliquotes commune assez fines. CAVALIERI et les "indivisibles" sont, sans doute, là dans l'ombre. Une question : cette idée des bandes parallèles était peut-être en germe chez BOUELLE ? ARNAULD n'évoque ni réciproque, ni l'espace.

En ce qui concerne les collèges dirigés par les Oratoriens, il y a les "Elémens" du Père LAMY (1685, réédités jusqu'en 1731) (*Document 12 ci-contre*). Ceux-ci sont rédigés dans l'esprit de l'ouvrage d'ARNAULD. Deux triangles sont dits semblables lorsque leurs côtés font des angles égaux ; la définition ne parle plus du rapport des côtés. Le cas de l'espace est étudié également chez cet auteur.

Mêmes idées dans l'ouvrage de l'abbé LA CAILLE (1744) et apparaît là une nouvelle figure sur ce sujet (*Document 13 ci-dessous*).

Elémens de Geometrie.

Livre II. Section V.

Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indivisibles ; parce qu'on suppose les lignes qui ont une largeur indivisible à cause de sa petitesse.

On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui sont sur une même base. & qui ont la même hauteur ou qui sont entre deux parallèles ; car si on suppose que deux lignes égales ont la même hauteur, & qu'elles se diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles fassent des surfaces égales. Si aussi on coupe deux surfaces sur deux bases égales, composées d'un égal nombre de lignes indivisibles, qui se diminuent proportionnellement ; de sorte que toutes soient égales chacune à chacune, il faut que ces deux surfaces qui sont deux triangles soient égales.



En général toutes les propriétés que nous avons démontrées sur les quantités proportionnelles, conviennent aux lignes qui le sont. Ainsi nous supposerons toujours la démonstration de ces propriétés. Au reste, il ne s'agit ici que de proportions & projections géométriques ; & c'est là partie la plus essentielle des Elémens de Geometrie.

430. Pour la traiter avec ordre, supposons d'abord que sur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI, &c., & que l'on mène les parallèles DF, GH, IK, &c., sur la droite AC, il est clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite seront égales entre elles ; car il on mène parallèlement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR seront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c.

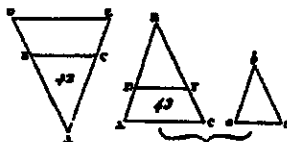
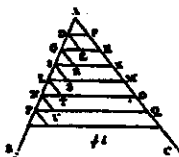
On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK ; & par conséquent AP somme de tout les antécédents est à AQ somme de tous les conséquents (241), comme un seul antécédent AD est à son conséquent AF, comme un nombre quelconque de parties de AB est au même nombre de parties de AC ; par exemple :: AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, &c.

431. Donc 1°. Si deux droites AE, AD sont coupées par deux ou par un plus grand nombre de parallèles ED, CB, leurs parties CE, BD seront proportionnelles aux lignes entières AE, AD.

432. 2°. Si deux triangles ABC, a b c sont semblables, tous leurs côtés homologues sont proportionnels.

Car si l'angle B = b, & si on prend sur AB la partie DB égale au côté homologue a b, en menant DF parallèle à AC, le triangle BDF sera égal au triangle a b c. Or AB : BC :: BD : b f. Donc AB : BC :: a b : b c.

Des Lignes proportionnelles.



Encore les "espaces parallèles" d'ARNAULD chez Rivard lequel dédie son ouvrage en 1732 au recteur de l'Université de Paris !... Il semble, en France au moins, qu'un nouveau point de vue prenne rang ; on le retrouve également dans l'ouvrage de MAZEAS (1770) au collège de Navarre. Le fond du problème est alors soulevé et c'est CLAIRAUT qui écrit : «Euclide avait à convaincre

des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux réalités les plus évidentes... Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte» (Préface des "Éléments de Géométrie" - 1743). C'est pourquoi «*Afin de suivre une route semblable à celle des inventeurs, il s'attache d'abord à faire découvrir aux commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains*». Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à la construction des figures en vraie grandeur. «*Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient à l'esprit de faire une figure semblable dans laquelle les pouces remplacent les toises*[(proposition 33) «*Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites*» (proposition 48)].

Ce point de vue sera couronné par LAPLACE dans son "Exposition du système du monde" (An IV). Il écrit : «*La proportionnalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide*».

Pour ces derniers, c'est donc proportionnalité qui engendre mêmes angles donc parallélisme - l'ordre est retrouvé -.

Et BÉZOUT ?

Dans ses "Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine" (1765-1770 et nombreuses rééditions), ne déclare-t-il pas : «*transportons aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres sur les proportions*»? Certes, on retrouve la figure inaugurée par LA CAILLE et donc les parallèles avant les triangles semblables, mais l'idée de rapports de mesures donc de nombres vient apporter un autre éclairage que d'aucuns voient en germe chez ARNAULD. Poursuite de cet autre éclairage également dans une réédition du "Cours de mathématiques" de BÉZOUT faite par REYNAUD, examinateur à l'école Polytechnique, en 1836. Au chapitre de la similitude des triangles, on lit : «*Ces principes sont la base de toutes les parties des mathématiques théoriques ou pratiques. Nous insisterons un peu sur leurs usages...*». Or, après quelque exemple, «*nous ne nous arrêterons pas plus longtemps parce que la trigonométrie nous fournira des moyens plus expéditifs...*». En effet, la trigonométrie fait maintenant partie des ouvrages de géométrie. S'il a existé, dès le XVI^e siècle, des ouvrages complets de trigonométrie, ceux-ci étaient distincts de ceux-là.

Mais nous sommes entrés dans le XIX^e siècle.

Et LEGENDRE ?

C'est le retour à Euclide. Les "Eléments de géométrie de LEGENDRE" règneront sur l'enseignement des mathématiques de 1794 à 1823 (12 éditions
Bulletin Inter-IREM - Commission Premier Cycle

de son vivant) tout en reprenant la démonstration et l'ordre du Grec. Ceux qui vont vivre de cette "Géométrie de Legendre", REYNAUD puis BLANCHET n'innovent pas. On ne compte plus les rééditions jusqu'en 1881... Et puis comme PEYRARD, en 1814 et 1819, publie sa nouvelle traduction d'Euclide à partir de textes anciens retrouvés, on ne regarde que de ce côté.

Toutefois DUPIN, dans son "Cours au Conservatoire des Arts et Métiers" (1826-28) - mathématiques intéressées-, reste fidèle à l'esprit de CLAIRAUT, donc aux bandes parallèles. Ensuite on trouve deux ouvrages qui furent discutés, leurs auteurs passant alors pour fort peu conformistes. Ils maintenaient la séparation entre les propriétés des parallèles et celles des triangles semblables. Ces auteurs sont :

- CATALAN (1^{ère} édition: 1843; 2^{ème} édition: 1866 ...). Il étudie d'abord les segments «*de deux droites quelconques déterminés par trois parallèles sont proportionnels*» puis les réciproques, puis le cas de n parallèles et, après seulement, les figures semblables. Il traite l'espace sous le titre : quadrilatère gauche.
- MERAY (1^{ère} édition: 1874; 2^{ème} édition: 1905 ...). Il étudie à la fois plan et espace, parle de "bandes" et de "murs parallèles", sépare les rapports, alors étudiés des figures semblables, évoque la notion de projection et use de rapports algébriques.

Par ailleurs, on relèvera que, dans leurs "essais sur la géométrie", ni CHASLES (1937) ni HOÛEL (1867) ne s'attarderont sur le sujet et ne citent Thalès à cette occasion.

Et les manuels scolaires ? Et les programmes ?

En effet, le XIX^e siècle vit éclore ces nouvelles entités agissant plus ou moins les unes sur les autres.

Si l'on se plonge dans ces ouvrages "scolaires", aucune mention de THALES n'apparaît d'abord. Ni dans les multiples géométries d'après LEGENDRE qui régnerent longtemps dans ce siècle, ni chez CIRRODE (1844) qui pourtant reprend l'idée d'ARNAULD, ni chez MACÉ de LESPINAY, ni chez VACQUANT (1866) - nous retrouverons ces noms plus tard - ni chez ANDRÉ (1895) ni chez GIROD (1881 et 1897) pour citer les plus répandus. Silence également après la réforme des programmes de 1905 et, toujours parmi les plus diffusés, on citera BOREL (1905) SAINTE LAGUE (1913) qui use de lignes proportionnelles avec sens, NIEWENGLOSKY et GÉRARD qui parlent de MÉNÉLAÛS et de CÉVA (1918), HADAMARD (1922) qui parle de "Théorème fondamental" avec la figure de LA CAILLE, Illović et Robert qui usent de vecteurs et d'homothétie (1939), et même LECOMTE (1942).

Mais quand apparaît donc THALES ?

Dans "Eléments de géométrie" de Rouché et Comberousse (Réédition de 1883), au livre III : Figures semblables, on lit cette scolie : « Dans le triangle, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés. Cette propriété fondamentale, dont la découverte est due à Thalès (639-548), ne subsiste pas pour les polygones quelconques ».

Curieuse entrée en scène. Mais et le "Théorème" ?

Il existe un ouvrage édité chez Mame à Tours, avec pour nom d'auteur J.F. mais sans date d'impression (Dans les dernières années du XIX^e siècle certaines maisons d'édition n'étaient pas de date pour, semble-t-il, des raisons d'imposition fiscale...). Cet ouvrage comporte un "Théorème de Thalès" (Document 14).

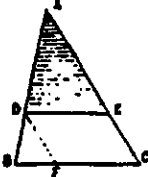
Dans "Exercices de Géométrie" par F.G.M., encore chez Mame (4^{ème} édition : 1907), on lit d'utiles compléments historiques.

Enfin, la date la plus ancienne, "Cours de géométrie élémentaire", par E. Combette professeur au Lycée Saint-Louis. Alcan éditeur, 1992 Théorème de Thalès : « On étudie un triangle coupé par une parallèle un des côtés... »

Exercices par F.G.M (1907)
4ème édition, page 96.
Ce livre comporte beaucoup de notes historiques

Théorème de Thalès

231. Toute parallèle menée à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.



Soit ABC un triangle quelconque, et DE une parallèle au côté BC. Il faut prouver que les deux triangles ADE et ABC ont les angles respectivement égaux, et les côtés homologues proportionnels.

1° L'angle A est commun ; les angles D et B sont égaux comme correspondants, ainsi que E et C.

2° Menons DF parallèle à AC. La figure DECF est un parallélogramme, et ainsi DE = FC (n° 100). A cause des parallèles DE et BC on a (n° 313) :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Les parallèles DF et AC donnent également :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ ou } DE}{BC} \text{ d'où } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ Donc...}$$

Fig. 164.

Document 14
Cours par F.J. (vers 1895?) page 96
Mame éditeur

§ III. — Similitude et homothétie.

206. Similitude. L'étude des figures semblables repose principalement sur le théorème de Thalès, relatif aux triangles semblables. (G., n° 221.) Pour résoudre un problème à l'aide de la similitude ou de l'homothétie, on construit une figure semblable à la figure demandée, et on compare une dimension à son homologue donnée. On opère surtout ainsi lorsque le problème proposé, ou le problème plus simple auquel on a pu le ramener, ne dépend que d'une ligne donnée.

206 a. Rem. Le nom d'homothétie est dû à CHARLES, mais l'étude des figures homothétiques est de PONCELET.
Actuellement l'étude de l'homothétie précède celle de la similitude, ou des figures semblables.

* THALES, un des sept sages de la Grèce (639 à 548 av. J.-C.), alla s'instruire en Égypte : il mesura la hauteur des pyramides par le moyen de leur ombre ; ainsi lui attribua-t-on les théorèmes relatifs aux triangles semblables. THALES d'habit ensuite à Milet, et y fonda l'École ionienne. Il est la gloire de compter PITAGORE un nombre de ses disciples.

Quelques curiosités et variétés

Barbarin : "Géométrie rationnelle" (ouvrage inspiré de Hilbert) (1911) énonce : «*Théorème fondamental (Thalès). Si deux sécantes coupent des parallèles...*»

Chamman et Rebouis -Classes de 2^{de} et 1^{ère} (édition 1925) (*Document 15, ci-dessous*) suivent scrupuleusement les programmes officiels et donc n'en par-

§ 3. — LIGNES PROPORTIONNELLES

251. Théorème fondamental. — Des droites parallèles déterminent sur des sécantes quelconques des segments proportionnels.

Soient les droites parallèles AB, CD, EF et les sécantes AE et BF; il faut démontrer que

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

255. REMARQUE. — On peut écrire aussi :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$$

256. Théorème. — Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux côtés qu'elle rencontre des segments proportionnels.

Chamman et Rebouis (1925)

lent pas, mais dans une édition de 1912 de la même collection, Géométrie dans l'espace :

«*Trois plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments proportionnels en vertu du théorème de Thalès.*» Pour la réciproque, ces auteurs évoquent orientation et signe. Donc ici, c'est Thalès dans l'espace...

Même aventure chez Chenevier : 1931 classe de Seconde, il est question de bandes parallèles, il y a une réciproque mais pas de nom propre. Par contre, 1925 : classes de 4^{ème} et 3^{ème}, «*Théorème de Thalès : dans un triangle coupé par une parallèle à un des côtés...*»

Donc, dans les ouvrages où figure un théorème de Thalès, celui-ci apparaît sous des formes différentes, dans des chapitres différents. En gros, deux grandes familles se dessinent quant à la géométrie plane :

- Triangle coupé par une parallèle à un des côtés dans le cadre de figures semblables, sans pour cela toujours reprendre la démonstration par les aires (famille d'Euclide). Nous y avons rencontré F.J. et F.G-M et Combette. Il y a également déjà notés, Vacquant, mais dans l'édition de 1908 et Macé de Lespinay dans l'édition de 1917. Ces deux auteurs citent maintenant Thalès. Et encore Boucheny et Gardinet (1920) Beche (1920) et plus tard Chenevier.
- Bandes parallèles et sécantes dans le cadre des lignes proportionnelles avec

parfois évocation de projection (famille d'Arnauld ?). Figurent là Barbarin, Brachet et Dumarquet, Maillard, Lebossé et Hemery, Lespinard et Pernet etc... Dans cette famille, Foulon (1937) fait de la propriété un théorème fondamental de Thalès et introduit les rapports algébriques pour unicité et réciproque.

La variété d'énoncés demeurera dans la seconde moitié du XX^e siècle d'autant que Thalès est maintenant cité dans les programmes. Vers 1990, la famille euclidienne paraît dominer dans les ouvrages scolaires sans que s'éclipse l'autre. On voit même apparaître "figures de Thalès" et "configuration de Thalès" (Terracher), et il y a aussi $k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, mais ceci est une autre histoire...

Et au-delà de "l'Hexagone" ?

Sur le sujet qui nous occupe, encore au milieu du XX^e siècle, pas de trace de Thalès. Témoins ces livres en anglais ou en allemand. Silence donc sauf, tardivement, dans des ouvrages d'inspiration française.

(Documents 16,17,18).

§ 5. Teorema lui Thales

TEOREMA IX.3. Fie λ un vector în planul Π prevăzut cu o origine O și vectorul $A' = \lambda A$. Fie încă d_1, d_2 două axe care trec prin originea O . În aceste condiții are loc relația :

$$A_i = \lambda A_1$$

sau, altfel spus :

$$(\lambda A)_i = \lambda A_1$$

1. Să facem deocândată ipoteza $\lambda > 0$ (fig. IX, 9).

a) Să presupunem $\lambda = p$ - întreg. În acest caz fie B, C, \dots puncte pe $d(O, A)$, așa ca $\varphi(O..A) = \varphi(A, B) = \varphi(B, C) = \dots = \varphi(L, A')$. După teorema lui Thalès sub forma slabă avem :

$$\varphi(O..A_1) = \varphi(A_1, B_1) = \dots = \varphi(L_1..A'_1)$$

și deci :

$$\varphi(O, A_1) = p \varphi(O..A_1)$$

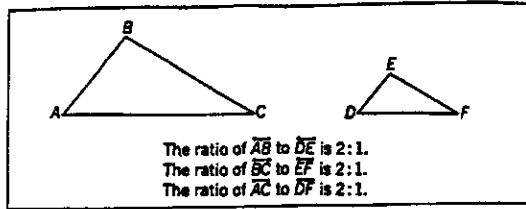
Fig. IX. 9

Document 16
Geometrie a planului
Bucuresti (1968)

Ratio in geometry

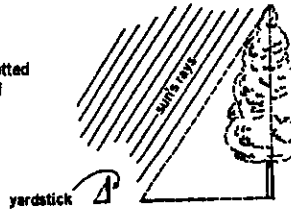
Document 17
Elementary School
Mathematics (6)
EICHOLZ
Addison-Wesley London
1964

When two triangles (or polygons) are similar, their sides can be paired so that the ratios are equal. In the example below, the two triangles are similar and the ratio of their sides is 2:1.



EXERCISES —

The two triangles shown by the dotted lines are similar. If the shadow of the yardstick is 2 feet and the shadow of the tree is 16 feet, how tall is the tree?



25. Der Strahlensatz

1. Trägt man auf dem Schenkel a eines Winkels (Fig. 210) gleich lange Strecken $SA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$ auf und zieht man durch die Endpunkte dieser Strecken parallele Gerade, so sind auch die auf dem zweiten Schenkel b durch die parallelen Geraden ausgeschnittenen Strecken $SB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ gleich lang.

Verschieben wir nämlich irgendeine der Teilstrecken auf dem Schenkel b , etwa B_1B_2 , in Richtung des Schenkels a nach $B'_1B'_2$ und dann diese Strecke in Richtung der Parallelen nach B_2B_4 , so ist $B_1B_2 = B'_1B'_2$, $B'_1B'_2 = B_2B_4$, also auch $B_1B_2 = B_2B_4$.

2. a) Wir tragen nun auf dem Schenkel a des Winkels zwei verschieden lange Strecken SA_1 und A_1A_2 auf (Fig. 211) und ziehen wieder durch deren Endpunkte parallele Gerade, die auf dem zweiten Schenkel b die Strecken SB_1 und B_1B_2 ausschneiden.

Haben nun die Strecken SA_1 und A_1A_2 das gemeinsame Maß e , so gilt:

$$\begin{aligned} SA_1 &= p \cdot e \\ A_1A_2 &= q \cdot e \\ \hline SA_1 : A_1A_2 &= p : q \end{aligned}$$

Dabei sind p und q ganze Zahlen (in Fig. 211 ist $p = 4$, $q = 7$).

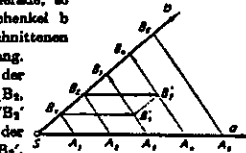


Fig. 210

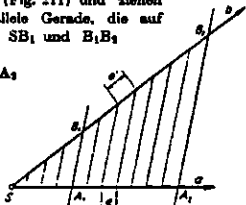


Fig. 211

Tragen wir nun das gemeinsame Maß e auf der Strecke SA_1 p -mal, auf der Strecke A_1A_2 q -mal auf, und ziehen wir auch durch die Teilungspunkte parallele Gerade zu den gegebenen Parallelen, so wird nach Absatz 1 die Strecke SB_1 in p , die Strecke B_1B_2 in q gleiche Teile e' geteilt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} SB_1 &= p \cdot e' \\ B_1B_2 &= q \cdot e' \\ \hline SB_1 : B_1B_2 &= p : q \end{aligned}$$

Aus den beiden Proportionen folgt:

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

Document 18
Lehrbuch der Mathematik für
die 3 und 4 Klasse der
Mittelschulen
LAUB - Wien 1966

Mais alors ?

C. Boyer dans "A history of mathematics" écrit : «*Au contraire des Egyptiens, les anciens Babyloniens étaient familiers avec le fait qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit, proposition généralement connue comme étant le théorème de Thalès*»... Et voilà! Autres témoins outre-Manche, outre-Rhin, le disciple énonce : «*Théorème de Thalès : un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.*» Documents 19-20.


Theorem of Thales—

an angle inscribed in a semi-circle is a right angle

Et, au Brésil...

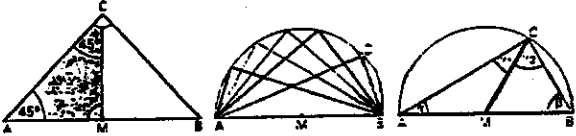
• O ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig.
Satz des Thales!



Document 19
Gamma 7
Mathematik Gymnasium

Der Satz des Thales



Satz: a) Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C auf dem Halbkreis über AB liegt dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
b) Wenn ein Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, dann liegt C auf dem Halbkreis über AB
Kurz: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechteck!

Document 20
Mambacker
Schweitzer
(1983 - Stuttgart)

Un collègue d'Helvétie questionné sur cette alternative associait, lui, le nom de l'homme de Milet à la propriété de la hauteur du triangle rectangle qui partage l'hypoténuse en deux segments qui...

L'Europe de l'enseignement aura à se pencher sur cet excès de théorèmes de Thalès, sinon «*Vérité en deça des Pyrénées, erreur au-delà*».

Enfin, pourquoi un nom en France, vers à la fin du XIX^e siècle.

Une hypothèse peut être avancée. Vers les débuts de la Troisième République, le programme de l'agrégation de mathématiques stipulait que les candidats devaient faire montre de connaissances en histoire de la discipline. On peut alors penser que, devenus maîtres, ceux-ci eurent à cœur d'user de leurs acquis en la matière et d'introduire des noms propres dans leurs cours. En effet, nombre de propriétés figurant dans des ouvrages antérieurs n'y avaient pas le parrainage de Pythagore, Euler ou Pascal comme cela va devenir fréquent par la suite.

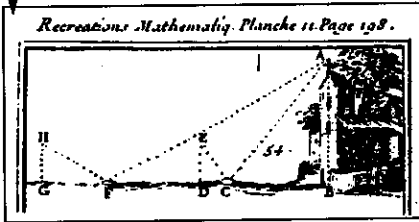
Les programmes français de la fin du XX^e siècle, en évoquant la "dimension historique" sont dans la ligne de ces efforts de montrer que, derrière les mathématiques, il y a des hommes. Ce petit travail a voulu y contribuer.

ANNEXE

Variæ

Dans "Récréations mathématiques" sans nom d'auteur - Rouen 1629).
- maçons et charpentiers useront longtemps encore du procédé -

Dans "Récréations mathématiques" d'OZANAM (1694)



- On peut aller à la base B, on place un miroir en C et de E, on vise le reflet de A.
- On ne peut aller en B, on fait une seconde visée avec miroir en F et du haut du même balcon (HG = ED) déplacé en H.

des Recrea. Mathe. 17

PROBLEME 12.

Mesurer la hauteur d'une Tour ou d'un Arbre, par le moyen de deux petits bastons ou de deux pailles, sans autre formalité.

FAUT avoir deux bastons tellement proportionnez, que EB. soit egal de DE. & DE. de DA. alors posant le point A. proche de l'angle de l'œil, & fermant l'autre, faut se reculer ou s'avancer jusques à ce que les rayons visuels d'écourent le point de hauteur G. & de profondeur ou de racine si c'est un arbre F. Alors mesurez la distance qu'il y a de vostre pied auprès de l'arbre, & vous aurez la hauteur d'iceluy: ce qui est requis.

Encore dans le même ouvrage d'OZANAM

Trouver à trois lignes données aux quatrièmes proportionnelles.

Pour trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatrième proportionnelle, décrivez des deux extrêmes B, D. de la première & de la troisième ligne donnée, par l'extrémité commune A, les deux arcs de Cercle AEF, AGH, & ayons appliqué sur le premier AEF la ligne AE égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G, & soulez la ligne AG, sera la quatrième proportionnelle qu'on cherche.

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AG}$ sans qu'apparaisse le mot parallèle...