# ꕥ Baccalauréat C HO–CHI–MINH Ville juin 1979 ꕥ

**EXERCICE 1** **4,5 POINTS**

1. **a.** $p$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit la suite

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}, \quad \text{par :} \quad V_n = \frac{p^n}{n+1}.$$

Démontrer que cette suite est strictement croissante.

En déduire que : $(\forall p > 2)$, $(\forall n > 1)$, $\dfrac{p^n}{n+1} \geqslant 1$

et : $(\forall p > 5)$, $(\forall n > 1)$, $\dfrac{p^n}{n+1} > 2$.

**b.** Trouver, à l'aide du résultat précédent, tous les couples $(p~;~n)$ où $p$ est un entier naturel premier, et $n$ un entier strictement positif, qui vérifient

$$1 \leqslant \frac{p^n}{n+1} \leqslant 2.$$

2. Soit $a$ un entier naturel non nul, qui s'écrit

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

où $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sont des entiers naturels premiers, deux à deux distincts, et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

On admettra que le nombre de diviseurs de $a$ dans $\mathbb{N}$ est

$$d(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

En utilisant 1. b., déterminer les entiers naturels non nuls $a$ tels que $a = 2d(a)$.

**EXERCICE 2** **4,5 POINTS**

Soit ABC un triangle, non équilatéral, d'un plan affine euclidien P et soit
$a = \left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{\text{CA}}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|$.
Soit G le centre de gravité du triangle.

1. Démontrer que $\text{GA}^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$.
2. Déduire du 1. la valeur de

$$\left(b^2-c^2\right)\text{GA}^2 + \left(c^2-a^2\right)\text{GB}^2 + \left(a^2-b^2\right)\text{GC}^2.$$

3. Déterminer l'ensemble $D$ des points $M$ du plan P tels que

$$\left(b^2-c^2\right)M\text{A}^2 + \left(c^2-a^2\right)M\text{B}^2 + \left(a^2-b^2\right)M\text{C}^2 = 0.$$

(On mettra en évidence deux points de D.)

**PROBLÈME** **11 POINTS**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x+1+\sqrt{x^2+4x}.$$

On appelle P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (On prendra pour unité : 1 cm).

1. **a.** Étudier la fonction $f$.

 **b.** Construire la courbe $C$ représentant $f$ dans le repère $\mathcal{R}$ du plan P.

2. **a.** Soit $C'$ la courbe représentative dans $\mathcal{R}$ de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x+1-\sqrt{x^2+4x}.$$

 Démontrer que $C$ et $C'$ sont symétriques par rapport au point $\Omega$ de coordonnées $(-2\,;\,-1)$ , (On ne demande pas d'étudier $g$).

 **b.** Comment obtient-on à partir de $C$ la courbe $\Gamma$, ensemble des points du plan P dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ vérifient :

$$y^2-2(x+1)y-2x+1 = 0.$$

 Représenter $\Gamma$ sur le dessin fait au 1.

3. **a.** Démontrer que $f$ définit une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[1\,;\,+\infty[$, dont la bijection réciproque est l'application $h$, qui peut s'écrire sur $[1\,;\,+\infty[$ :

$$h(x) = \frac{(x+1)^2-4(x+1)+4}{2(x+1)}$$

 **b.** Calculer $\displaystyle\int_1^{2+\sqrt{5}} h(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire en cm$^2$ du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $C$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
 On donnera le résultat à $10^{-2}$ près).

**Partie B**

On considère à présent le repère $\mathcal{R}' = \left(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J}\right)$ du plan, où $\Omega$ est le point de coordonnées $(-2\,;\,-1)$ et où $\vec{I} = \vec{\imath}$, $\vec{J} = \vec{\imath}+2\vec{\jmath}$.

1. **a.** Étant donné un point $M$ du plan P, on note $(x\,;\,y)$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$, $(X\,;\,Y)$ ses coordonnes dans $\mathcal{R}'$.
 Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

 **b.** Écrire l'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathcal{R}'$, et reconnaître cette courbe.

2. Pour tout nombre réel non nul $k$, on note $\Delta_k$ la droite d'équation $Y = kX$ dans $\mathcal{R}'$.

 **a.** $k$ et $k'$ étant deux réels non nuls distincts, exprimer analytiquement dans $\mathcal{R}'$, la symétrie d'axe $\Delta_k$ parallèlement à $\Delta_{k'}$.

 **b.** Démontrer que pour tout nombre réel non nul $k$, il existe $k' \in \mathbb{R}^\star$, unique tel que la symétrie par rapport à $\Delta_k$ parallèlement à $\Delta_{k'}$ échange le support des axes du repère $\mathcal{R}'$. On note $S_k$ cette symétrie.

 **c.** Vérifier que, quel que soit le réel $k$ non nul, $S_k$ conserve la courbe $\Gamma$.