

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Inde–Liban septembre 1994 œ

EXERCICE 1

5 points

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A, B et C sont les points d'affixes respectives i , $-i$ et $-3i$.

À tout point M d'affixe $z (z \neq -3i)$ on associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 1}{z + 3i}.$$

- Déterminer les points M pour lesquels $M' = M$.
- Montrer que pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a : $\frac{z' + i}{z' - i} = 2 \frac{z + i}{z - i}$.
- Soit Π l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$.
 - Déterminer et construire Π (préciser les éléments permettant cette construction). Vérifier que C appartient à Π .
 - Montrer, en utilisant 2, que si M appartient à $\Pi - \{C\}$, alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

EXERCICE 2

4 points

Soit ABC un triangle quelconque du plan orienté.

On désigne par

R_1 la rotation de centre A et d'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) ,

R_2 la rotation de centre C et d'angle (\vec{CA}, \vec{CB}) ,

R_3 la rotation de centre B et d'angle (\vec{BC}, \vec{BA}) .

Le but de l'exercice est de déterminer la transformation f définie par

$$f = R_3 \circ R_2 \circ R_1.$$

Soit Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les bissectrices intérieures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}, \widehat{ACB}$ et \widehat{ABC} .

Soit I le point de concours de ces trois droites.

Les réflexions d'axes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont notées $S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}$ et S_{Δ_3} .

- Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
- Montrer que $R_2 \circ R_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.
(On utilisera des décompositions de R_2 et de R_1 en produits de réflexions.)

PROBLÈME

12 points

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie 1

Soit g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x.$$

1. Étudier les variations de g_n .
Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
2. a. En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
b. Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$.
c. Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$.
Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n .
En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
3. a. Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note ℓ sa limite.
b. En utilisant 2. c., calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ .

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 2 cm).
On appelle C la représentation graphique de f et C_0 la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$. Que peut-on en déduire pour C ?
5. Préciser les positions relatives de C et C_0 .
6. Dessiner C et C_0 .

Partie 3

Étude de la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

1. Soit $J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} dx$.
a. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b. En déduire J .
2. Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n - 1$.
En utilisant les variations de f sur $]1; +\infty[$, montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

3. En déduire que : $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$,
puis que : $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$,
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.