Durée : 4 heures

Baccalauréat C Inde–Liban septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
A, B et C sont les points d'affixes respectives i, $-$i et -3i.
À tout point M d'affixe $z (z \neq -3\text{i})$ on associe le point M' d'affixe z'
définie par

$$z' = \frac{3\text{i}z - 1}{z + 3\text{i}}.$$

1. Déterminer les points M pour lesquels $M' = M$.
2. Montrer que pour $z \neq \text{i}$ et $z \neq -3\text{i}$, on a : $\dfrac{z' + \text{i}}{z' - \text{i}} = 2\dfrac{z + \text{i}}{z - \text{i}}$.
3. Soit Π l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1}{2}$.
   a. Déterminer et construire Π (préciser les éléments permettant cette construction). Vérifier que C appartient à Π.
   b. Montrer, en utilisant 2, que si M appartient à $\Pi - \{C\}$, alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit ABC un triangle quelconque du plan orienté.
On désigne par

R_1 la rotation de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$,

R_2 la rotation de centre C et d'angle $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$,

R_3 la rotation de centre B et d'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la transformation f définie par

$$f = R_3 \circ R_2 \circ R_1.$$

Soit Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les bissectrices intérieures respectives des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$.
Soit I le point de concours de ces trois droites.
Les réflexions d'axes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont notées S_{Δ_1}, S_{Δ_2} et S_{Δ_3}.

1. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
2. Montrer que $R_2 \circ R_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.
   (On utilisera des décompositions de R_2 et de R_1 en produits de réflexions.)

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie 1

Soit g_n la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x.$$

1. Étudier les variations de g_n.
Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

2. a. En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

b. Montrer que : $1 \leqslant \alpha_n < \mathrm{e}^2$.

c. Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \dfrac{2}{n}\alpha_n$.
Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n.
En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

3. a. Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note ℓ sa limite.

b. En utilisant 2. c., calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On appelle C la représentation graphique de f et C_0 la représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \sqrt{x}\right]$. Que peut-on en déduire pour C ?

5. Préciser les positions relatives de C et C_0.

6. Dessiner C et C_0.

Partie 3

Étude de la suite (U_n) définie par $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

1. Soit $J = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire J.

2. Soit k un entier naturel tel que : $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.
En utilisant les variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$, montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

3. En déduire que : $U_n - \dfrac{f(2)}{n} \leqslant J \leqslant U_n - \dfrac{f(1)}{n}$,
puis que : $J + \dfrac{f(1)}{n} \leqslant U_n \leqslant J + \dfrac{f(2)}{n}$,
et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.