Corrigés du baccalauréat S 2015

L'intégrale d'avril 2015 à mars 2016

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

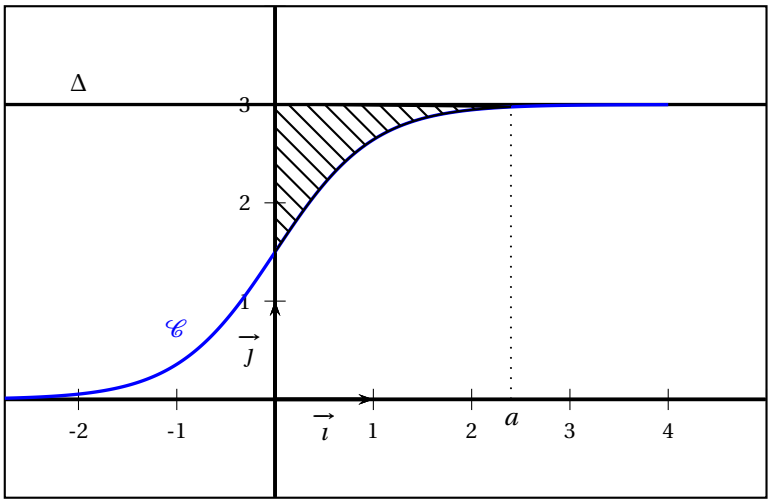
Pondichéry – 17 avril 2015 3
Liban – 27 mai 2015 9
Amérique du Nord – 2 juin 2015 17
Centres étrangers – 10 juin 2015 26
Polynésie – 12 juin 2015 33
Asie – 16 juin 2015 40
Antilles-Guyane – 22 juin 2015 48
Métropole – 22 juin 2015 56
Métropole – 9 septembre 2015 64
Polynésie – 9 septembre 2015 74
Antilles-Guyane – 12 septembre 2015 82
Nouvelle-Calédonie – 19 novembre 2015 90
Amérique du Sud – 24 novembre 2015 96
Nouvelle-Calédonie – 5 mars 2016 106

Corrigé du baccalauréat S – Pondichéry 17 avril 2015

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1+\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ on a :
$f'(x) = -\dfrac{3u'(x)}{(1+u(x))^2} = -\dfrac{3\times(-2)\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où
$\displaystyle\lim_{X\to-\infty} 1+\mathrm{e}^X = 1$ et enfin par quotient de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
3. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.
La calculatrice donne :
$f(4) \approx 2{,}99899$ et $f(5) \approx 2{,}9999$, donc $4 < \alpha < 5$;
$f(4,0) \approx 2{,}99899$ et $f(4,1) \approx 2{,}9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;
$f(4,00) \approx 2{,}99899$ et $f(4,01) \approx 2{,}99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x)$.
Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus.

b. D'après la question **B. 2.**, on a :
$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) =$
$\displaystyle\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\displaystyle\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a pour tout naturel n, $\displaystyle v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$
$\displaystyle au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a\left[u_n - \frac{b}{1-a}\right] = av_n$.
L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1\,;\,1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n - \frac{b}{1-a}$ soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $\displaystyle 80\times\left(1-\frac{1}{4}\right) = 80\times\frac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la tailles $60+30 = 90$ cm.
2. **a.** D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\displaystyle\frac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :
$h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

   b. Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
$h_2 = 0,75\times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.
Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h_p < h_{p+1}$, alors
$0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$: l'hérédité est démontrée, donc la suite (h_n) est croissante.

   c. Si la suite (h_n) converge vers ℓ, par continuité l'égalité :
$h_{p+1} = 0,75h_p + 30$ donne en passant aux limites à l'infini :
$\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$.
La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice $h_{20} \approx 119,873$ cm).
On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients $a = 0,75$ et b = 30.
Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\displaystyle\frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0,75} = \frac{30}{0,25} = 120$.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. **a.** Par symétrie $P(104 \leqslant X) = 0,16$ et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$.

   b. On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leqslant X \leqslant \mu + 20) = 0,68$: donc $\sigma \approx 20$.

2. **a.** La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.

   b. On part de $P(X \leqslant 64) = 0,16$, d'où $P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20) =$
   $P\left(\dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.
   Finalement $P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$

   c. Le résultat précédent entraîne que $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \dfrac{20}{0,9945}$ soit $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.

   a. Il faut trouver :
   $P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$ (calculatrice)

   b. On a $P(X \geqslant 120) = 0,5 - P(84 \leqslant X \leqslant 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. **a.** Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathscr{B}(12,\ 0,115)$.
   La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :
   $P(G = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,1114$ soit 0,111 au millième près.

   b. On a $P(G \geqslant 6) = 1 - P(G \leqslant 5) \approx 0,001$ au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
   • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

   a. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
   • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.
   La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

   b. On a $\mathrm{E}(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$ €au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\mathrm{M}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$, $\mathrm{N}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $\mathrm{P}\left(1\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$. $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(-1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\ (0\ ;\ -1\ ;\ -2)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. **a.** $-1 \times 0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(\dfrac{1}{4}\right) \times (-2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{\text{MP}} = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. **a.** Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
$5x - 8y + 4z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$;
$\text{N} \in (\text{MNP}) \iff -8 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 1 = d = \iff 0 = d$
Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.

b. On traduit la relation vectorielle : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\,\vec{n}$, $t \in \mathbb{R}$ soit
$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & 5t \\ y-0 & = & -8t \\ z-1 & = & 4t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right.$

6. **a.** Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :
$\left\{\begin{array}{lcl} 5x-8y+4z & = & 0 \\ x & = & 1+5t \\ y & = & -8t \\ z & = & 1+4t \end{array}\right. \Rightarrow 5(1+5t) - 8 \times (-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff 105t + 9 = 0 \iff$
$t = -\dfrac{9}{105} \iff t = -\dfrac{3}{35}$.
D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$;
$y = -8 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{24}{35}$;
$z = 1 + 4 \times \left(-\dfrac{3}{35}\right) = 1 - \dfrac{12}{35} = \dfrac{23}{35}$.
Donc $\text{F}\left(\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{24}{35}\,;\,\dfrac{23}{35}\right)$.

b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc
$V_{\text{MNPF}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{MNP} \times \text{FK})$.
Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\text{MNP} = \dfrac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}$.
$\text{MN}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;
$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5}$;
Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}} = \dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$
$\dfrac{1}{24} \times \sqrt{\dfrac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours.
2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33}-1$.

   a. Si 3 divise $2^{33}-1$ et 4 divise $2^{33}-1$, comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le **1.** 12 devrait diviser $2^{33}-1$ ce qui est contradictoire avec ce que dit l'élève : il a donc tort.

   b. 2^{33} est un naturel pair donc $2^{33}-1$ est impair donc 4 ne peut le diviser.

   c. $2 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow 2^3 \equiv (-1)^3 \quad [3] \iff 2^3 \equiv -1 \quad [3] \Rightarrow \left(2^3\right)^{11} \equiv (-1)^{11} \quad [3] \iff 2^{33} \equiv -1 \quad [3]$ donc $2^{33}-1 \equiv -2 \quad [3]$ ce qui prouve que 3 ne divise pas $2^{33}-1$.

   d. $S = 1+2^3+\left(2^3\right)^2+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{10}$;
   $2^3S = 2^3+2^4+\left(2^3\right)^3+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{11}$, d'où par différence :
   $7S = \left(2^3\right)^{11}-1 \iff S = \dfrac{\left(2^3\right)^{11}-1}{7}$.

   e. S est une somme d'entiers naturels donc est un entier naturel ; le résultat précédent montre que $\left(2^3\right)^{11}-1$ est donc un multiple de 7.
   Finalement $2^{33}-1$ est divisible par 7.

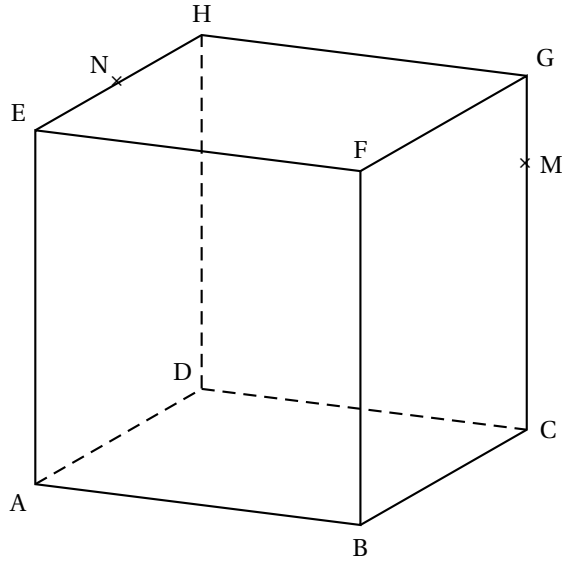
3. $2^7-1 = 128-1 = 127$.
   Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (dans la division reste 1), ni par 11 (dans la division reste 7), ni par 13 (dans la division reste 10) et comme $13^2 = 169$, il est inutile de continuer : 127 est premier.
4. **a.** Comme on vient de le voir pour 127, l'algorithme cherche le reste de la division de $2^{33}-1$ par les naturels 2, 3, 4, etc., $k \leqslant \sqrt{2^n-1}$ tant que le reste est non nul.
   On a vu que le nombre $2^{33}-1$ n'était divisible ni par 2 ni par 3, donc il n'est divisible ni par 4 ni par 6. Il faut regarder si ce nombre est divisible par 5.
   $2^{11} = 2048$ donc $2^{11} \equiv 3 \quad [5]$ donc $\left(2^{11}\right)^3 \equiv 3^3 \quad [5]$; $3^3 = 27 \equiv 2 \quad [5]$ donc $\left(2^{11}\right)^3 \equiv 2 \quad [5]$ ce qui entraine que $2^{33} \equiv 2 \quad [5]$ et donc que $2^{33}-1 \equiv 1 \quad [5]$.
   On a donc démontré que 5 ne divisait pas $2^{33}-1$.
   On a vu dans une question précédente que le nombre $2^{33}-1$ était divisible par 7, donc l'algorithme va afficher son premier diviseur 7 et « CAS 2 ».
   Si on entre $n = 7$, l'algorithme affiche 12 et « CAS 1 ».

   b. Le CAS 2 concerne donc les nombres de Mersenne non premiers et le nombre k est le plus petit de ses diviseurs (différent de 1).

   c. Le CAS 1 concerne les nombres de Mersenne premiers comme 2^7-1.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



P ×

Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

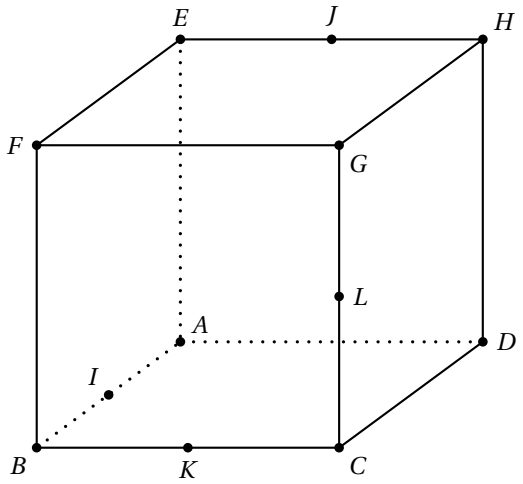
Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Liban 27 mai 2015

EXERCICE 1 **6 points**



1. **a.** Par lecture sur le dessin ci-dessus on détermine facilement les coordonnées des points représentés :

$$A(0,\ 0,\ 0);\ B(1,\ 0,\ 0);\ C(1,\ 1,\ 0);\ D(0,\ 1,\ 0);\ E(0,\ 0,\ 1);\ F(1,\ 0,\ 1);\ G(1,\ 1,\ 1);\ H(0,\ 1,\ 1).$$

On obtient alors les coordonnées des quatre points restants

$$I\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right);\ J\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right);\ K\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right);\ L\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right).$$

D'où

$$\overrightarrow{FD}\,(-1,\ 1,\ -1);\ \overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right);\ \overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

et donc

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc normal au plan (IJK), il s'ensuit que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b. Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ étant normal au plan (IJK), celui-ci a une équation cartésienne de la forme

$$-x+y-z+d = 0.$$

Or $I\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ appartient à ce plan donc

$$-\frac{1}{2}+d = 0 \iff d = \frac{1}{2}$$

le plan (IJK) a donc pour équation

$$-x+y-z+\frac{1}{2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad -2x+2y-2z+1 = 0.$$

2. La droite (FD) étant dirigée par le vecteur $\overrightarrow{FD}\,(-1,\ 1,\ -1)$ et passant par le point $F(1,\ 0,\ 1)$ admet comme représentation paramétrique le système

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) vérifient les deux relations

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \end{array}\right. \quad (S) \quad \text{et} \quad -2x+2y-2z+1=0 \quad (E)$$

Dans (E), on obtient

$$-2(1-t)+2t-2(1-t)+1=0 \iff 6t-3=0 \iff t=\frac{1}{2}.$$

Ce qui donne, en remplaçant dans (S)

$$x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2} \quad z=\frac{1}{2}.$$

4. Comme

$$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0$$

les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, le triangle IJK est donc rectangle.
Son aire est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times IJ\times IK = \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0} = \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. Le volume du tétraèdre $FIJK$ est

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times FM\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$$

6. On détermine un système d'équations paramétriques des droites (IJ) et (KL)

$$(IJ)\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (KL)\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t' \\ z = \frac{1}{2}t' \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t & = 1 \\ \frac{1}{2}t & = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t' \\ t & = \frac{1}{2}t' \end{array}\right.$$

qui admet pour unique solution $t=-1$ et $t'=-2$, ce qui prouve que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes au point $P\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -1\right)$

EXERCICE 2 **6 points**

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\ \ln(x+1)\ \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

2. **a.**

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\frac{x+1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

b. Il résulte de la question précédente que $u_1 + u_0 = 1$, or $u_0 = \ln(2)$, donc

$$u_1 = 1 - \ln(2).$$

3. **a.** On peut modifier l'algorithme de la façon suivante

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln(\mathbf{2})$
Traitement :	Pour i variant de 1 à $\mathbf{n}$ | Affecter à u la valeur $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{i}} - \mathbf{u}$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

b. On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 0.

4. **a.**

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\frac{x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $x \in [0,\ 1]$ donc x^n et $1+x$ sont positifs, mais $x-1$ est négatif , donc

$$\int_0^1 x^n\,\frac{x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x < 0$$

et par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

b. Tous les termes de cette suite étant positifs, la suite (u_n) est donc minorée par 0.
Comme elle est également décroissante, il en résulte d'après le théorème de la convergence monotone qu'elle est convergente.

5. Soit ℓ sa limite, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = 2\ell$$

Or

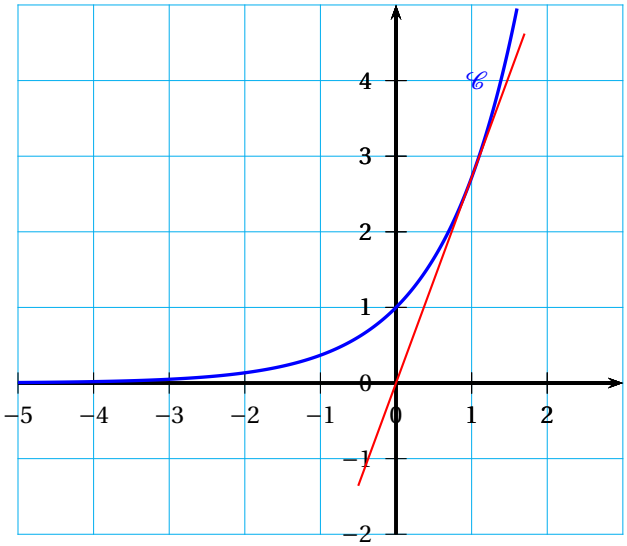
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc

$$2\ell = 0 \iff \ell = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

EXERCICE 3 **3 points**



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est donné par

$$y = \mathrm{e}^1(x-1) + \mathrm{e}^1 \iff y = \mathrm{e}x.$$

La droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$: $y = \mathrm{e}x$ est donc tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. On conjecture que :

- Si $m < \mathrm{e}$ il n'y a aucun point d'intersection.
- Si $m = \mathrm{e}$ il y a un point d'intersection.
- Si $m > \mathrm{e}$ il y a deux points d'intersection.

3. Première solution

Le point M de coordonnées $(x,\ y)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}_m$ si et seulement si

$$\mathrm{e}^x = mx \iff \mathrm{e}^x - mx = 0.$$

Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - mx$, alors

$$\mathrm{e}^x = mx \iff f(x) = 0.$$

Étudions cette fonction f, il vient :

- $f'(x) = \mathrm{e}^x - m$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = +\infty$ car $m > 0$
- $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > m \iff x > \ln(m)$
- $f(\ln(m)) = m - m\ln(m) = m(1 - \ln(m))$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Il résulte de ce tableau de variations que

- si $m(1 - \ln(m)) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution ;
- si $m(1 - \ln(m)) = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution ;
- si $m(1 - \ln(m)) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

Or comme $m > 0$,

$$m(1 - \ln(m)) > 0 \iff 1 - \ln(m) > 0 \iff 1 > \ln(m) \iff \mathrm{e} > m,$$

d'où, en définitive

- si $m < \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'auront aucun point d'intersection ;
- si $m = \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ auront un seul point d'intersection ;
- si $m > \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ auront deux points d'intersection.

Deuxième solution

On veut déterminer dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = mx$. On sait que $m > 0$ et que, pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc les solutions de cette équation seront strictement positives.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^x = mx \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = m$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $x-1$ donc négatif sur $]0\,,\,1[$ puis positif sur $]1\,,\,+\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum pour $x=1$ égal à $f(1)=\dfrac{\mathrm{e}^1}{1}=\mathrm{e}$.

D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1 \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$

On établit le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions $f(x)=m$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et de la droite horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y=m$.

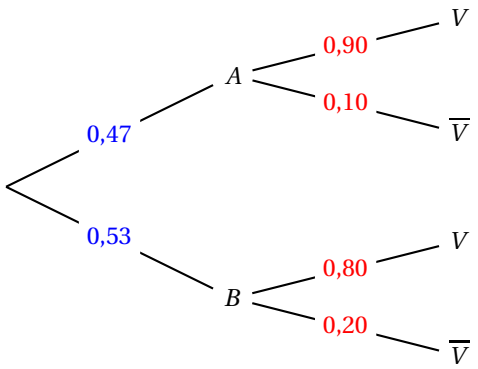
D'après le tableau de variation de f :

- si $m<\mathrm{e}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point d'intersection donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ n'ont pas de point d'intersection ;
- si $m=\mathrm{e}$, la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$, donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ ont un seul point d'intersection, et donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ ont un seul point d'intersection ;
- si $m>\mathrm{e}$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont deux points d'intersection, donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On obtient l'arbre suivant



2. **a.** D'après l'arbre

$$p(V)=0{,}47\times 0{,}90+0{,}53\times 0{,}80=0{,}847.$$

b. $p_V(A)=\dfrac{p(V\cap A)}{p(V)}=\dfrac{0{,}47\times 0{,}90}{0{,}847}=0{,}499$

3. La personne interrogée vote effectivement pour le candidat A si elle dit la vérité et dit voter pour le candidat A ou bien si elle ment et dit voter pour le candidat B, soit d'après l'arbre :

$$p(A)=0{,}47\times 0{,}90+0{,}53\times 0{,}20=0{,}529.$$

4. On détermine un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%, par

$$I = \left[0{,}529 - \frac{1}{\sqrt{1200}};\ 0{,}529 + \frac{1}{\sqrt{1200}}\right] = \left[0{,}5001;\ 0{,}5579\right]$$

Les conditions d'applications étant vérifiées

$$1200 > 30 \quad \text{et} \quad 1200 \times 0{,}5579 > 5 \quad \text{et} \quad 1200 \times 0{,}4421 > 5.$$

La borne inférieur de l'intervalle de confiance au seuil de 95% étant supérieure à 0,5, le candidat A peut raisonnablement croire qu'il sera élu.

5. Par demi-heure, il y a en moyenne $0{,}4 \times 10 = 4$ personnes qui répondent, soit 8 personnes par heure.

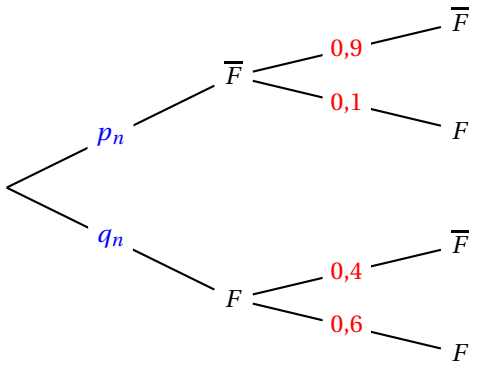
Comme on a besoin d'avoir 1 200 réponses, il faudra en moyenne $\dfrac{1\,200}{8} = 150$ heures pour parvenir à cet objectif.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Puisque $q_0 = 1$, cela signifie que le fumeur a fumé le jour où il a décidé d'arrêter de fumer ! Donc il aura une probabilité de 0,6 de fumer le lendemain, et donc $q_1 = 0{,}6$ soit $p_1 = 0{,}4$.

2. On peut modéliser la situation par un arbre :



d'où

$$p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}4q_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}6q_n.$$

Ce qui se traduira par les formules :

- En B3 : $= 0{,}9 \times B2 + 0{,}4 \times C2$
- En C3 : $= 0{,}1 \times B2 + 0{,}6 \times C2$

3. **a.** $A + 0{,}5B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = M$

b. d'une part

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}64+0{,}16 & 0{,}64+0{,}16 \\ 0{,}16+0{,}04 & 0{,}16+0{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = A$$

d'autre part

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}16-0{,}16 & -0{,}64+0{,}64 \\ 0{,}04-0{,}04 & -0{,}16+0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie de même que

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. On procède par récurrence :

- Initialisation : C'est vrai pour $n = 0$, en effet :

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A + 0{,}5^0 B = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hérédité : supposons que $M^n = A + 0{,}5^n B$, alors il vient

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (A + 0{,}5^n B) \times (A + 0{,}5B) \\ &= A^2 + 0{,}5^n B \times A + 0{,}5A \times B + 0{,}5^{n+1} B^2 \\ &= A + 0{,}5^{n+1} \times B \end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout n

$$M^n = A + 0{,}5^n B.$$

d. Comme $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et que $X_n = M^n \times X_0$, il vient

$$X_n = \left(A + 0{,}5^n B\right) \times X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 + 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8 \\ 0{,}2 - 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}2 + 0{,}5^n \times 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8 \\ 0{,}2 + 0{,}5^n \times 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Donc

$$p_n = 0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}5^n$$

e. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8.$$

À long terme la probabilité qu'il arrête de fumer va se stabiliser vers 0,8. On n'a pas la certitude qu'il arrêtera de fumer.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Amérique du Nord 2 juin 2015

Exercice 1

Partie A

1. On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point.
   Pour cela considérons le triangle SOB.
   Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S. On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\frac{BU}{BS} = \frac{OD}{OS} = \frac{1}{3}$.
2. Considérons les plans (AUE) et (BCS). Ces plans sont sécants en la droite (UV). Or, (BC), incluse dans (BCS), est parallèle à (AE), incluse dans (AEU) ; puisque $ABCE$ est un carré.
   Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC). Cette dernière propriété permet de construire le point V.
3. Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE).
   On lit les coordonnées de $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et celles de $E\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. D'autre part on détermine $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{6}\\0\end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.
   Déterminons les coordonnées de U. On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_u - 0 & = & \frac{1}{3}(0-0)\\ y_u - 1 & = & \frac{1}{3}(0-1)\\ z_u & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_u & = & 0\\ y_u & = & \frac{2}{3}\\ z_u & = & 1\end{array}\right.$$
   On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\\1\end{pmatrix}$.
   On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{KU}\cdot\overrightarrow{AE} = \frac{-5}{6}\times(-1) + \frac{5}{6}\times(-1) + 1\times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

   > On pouvait également déterminer une équation paramétrique de (BS) afin de calculer les coordonnées de U.
   > Une telle méthode revient à chercher le réel t tel que $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ avec la cote de U égale à 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A, E et U vérifient bien l'équation proposée.
   Pour le point A, on a bien $3\times 1 - 3\times 0 + 5\times 0 - 3 = 0$.
   De même pour le point E, il est clair que $3\times 0 - 3\times(-1) + 5\times 0 - 3 = 0$.
   Et enfin, pour le point U, on vérifie mentalement que $3\times 0 - 3\times\frac{2}{3} + 5\times 1 - 3 = 0$.
   Cette équation de plan convient donc.

2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU). Notons $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$ ce vecteur.

C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU). À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU). On cherche donc x, y, z et t tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\\ 0 &=& 3x-3y+5z-3\end{array}\right.$$

À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x, y et z on en déduit le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t\\ y &=& -3t\\ z &=& 3+5t\\ 0 &=& 3(3t)-3(-3t)+5(3+5t)-3\end{array}\right.$$

La dernière équation permet de déterminer $t = \dfrac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H\begin{pmatrix}\frac{-36}{43}\\ \frac{36}{43}\\ \frac{69}{43}\end{pmatrix}$.

4. Le plan (EAU) coupe le tétraèdre $SABCE$ en un prisme $ABUECV$ d'une part et un tétraèdre $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume ; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.

Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume du tétraèdre $SAUVE$. Nous connaissons en effet l'aire de sa base $\mathscr{A}_{AUVE} = \dfrac{5\sqrt{43}}{18}$. Reste à calculer sa hauteur SH. On a ainsi :

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(\frac{-36}{43}-0\right)^2+\left(\frac{36}{43}-0\right)^2+\left(3-\frac{69}{43}\right)^2}\\ &= \frac{12}{\sqrt{43}}\end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre $SAUVE$ est donc $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{1}{3}\mathscr{A}_{AUVE} \times SH$, ce qui donne après calcul : $\mathscr{V}_{SAUVE} = \dfrac{10}{9}$.

Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide $SABCE$. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $AB = \sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire $AB^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $SO = 3$. Le volume de la grosse pyramide est donc $\mathscr{V}_{SABCE} = \dfrac{1}{3}AB^2 \times SO = 2$.

On constate que $\dfrac{1}{2}\mathscr{V}_{SABCE} \neq \mathscr{V}_{SAUVE}$, ce qui permet de conclure.

Exercice 2

1. **a.** On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.
On obtient :

$$A_0\begin{pmatrix}-4,8\\1,4\end{pmatrix} \qquad A_1\begin{pmatrix}-4,68\\-1,76\end{pmatrix} \qquad A_2\begin{pmatrix}-2,688\\-4,216\end{pmatrix}$$

Ceux qui font l'option mathématiques auront reconnu qu'on peut définir matriciellement la suite des coordonnées. C'est d'ailleurs comme cela que l'on peut rapidement calculer les termes de la suite à la calculatrice.

b. Voir plus bas :

Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées $(x\,;\,y)$
    t prend la valeur x
    x prend la valeur $0,8\times x-0,6\times y$
    y prend la valeur $0,6\times t+0,8\times y$
Fin Pour

L'erreur à ne pas commettre ici était d'utiliser x dans le calcul de y. En effet, à ce stade, x a déjà été modifié. C'est d'ailleurs pour cela que l'algorithme propose de stocker temporairement l'ancienne valeur de x dans la variable t.

c. On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre O et de rayon 5.

a. Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite z est définie par récurrence.
Au rang 0, $|z_0| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$. La propriété est vérifiée.
Fixons un entier p et supposons que $|z_p| = \sqrt{x_p^2+y_p^2} = 5$.
Au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}
|z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2+y_{p+1}^2}\\
&= \sqrt{\left(0,8x_p-0,6y_p\right)^2+\left(0,6x_p+0,8y_p\right)^2}\\
&= \sqrt{(0,8^2+0,6^2)x_p^2+(0,6^2+0,8^2)y_p^2+(0,8\times0,6-0,6\times0,8)x_p\,y_p}\\
&= \sqrt{x_p^2+y_p^2}. \text{ Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2+y_p^2}=5. \text{ Donc :}\\
|z_{p+1}| &= 5
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.
Ainsi, pour tout n, on a bien $u_n = |z_n| = 5$, ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

b. Calculons, pour tout n, la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(x_n + \mathrm{i}y_n)\\
&= (0,8 + \mathrm{i}0,6)(x_n + \mathrm{i}y_n)\\
&= (0,8x_n + \mathrm{i}^2 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)\,\mathrm{i}\\
&= (0,8x_n - 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)\,\mathrm{i}\\
&\text{On reconnaît les formules de récurrence de } x_{n+1} \text{ et } y_{n+1} :\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n &= x_{n+1} + y_{n+1}\,\mathrm{i}\\
&= z_{n+1}
\end{aligned}$$

c. z est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sur des complexes. Comme cette notion n'est pas au programme, nous allons redémontrer la formule explicite.
Pour $n = 0$ la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie à un rang p fixé : $z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta} z_0$.
Mais nous savons que $z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta} z_0$. On a ainsi :
$z_{p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta + \mathrm{i}\theta} z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\theta} z_0$.
La propriété est donc héréditaire et initialisée.
Ainsi, pour tout n, on a bien $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

d. Posons $\theta_0 = \arg(z_0)$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\frac{z_0}{|z_0|} &= \cos(\theta_0) + \mathrm{i}\sin(\theta_0)\text{. Or :}\\
\frac{z_0}{|z_0|} &= \frac{-3}{5} + \mathrm{i}\frac{4}{5}\\
&= -0,6 + \mathrm{i}0,8\text{. On reconnaît les valeurs de cos et sin de } \theta :\\
&= -\sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta)\text{. En utilisant les formules de trigonométrie, on a :}\\
\frac{z_0}{|z_0|} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne, $\arg(z_0) = \theta_0 = \dfrac{\pi}{2} + \theta$

On pouvait également calculer le forme algébrique de $|z_0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ et montrer qu'elle était identique à celle de z_0. Cette méthode est d'ailleurs certainement plus « facile » à mettre en œuvre.

e. On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right) + \arg(z_0) = n\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$

On représente θ en utilisant le point A_0. En effet, ce point vérifie $\left(\vec{\imath};\ \overrightarrow{OA_0}\right) = \arg(z_0) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, on obtient facilement, par différence, que $\left(\vec{\jmath};\ \overrightarrow{OA_0}\right) = \theta$.
On a tracé θ en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir A_{n+1} :
À partir du point A_n, on se déplace d'un angle θ sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir A_{n+1}. Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à θ.

Exercice 3

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

1. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leq X \leq 102) \simeq 0,9545$ à 10^{-4} près.

2. Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$98 \leq X \leq 102 \iff 98 - 100 \leq X - 100 \leq 102 - 100$$
$$\iff \frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X-100}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}$$

Posons $Z = \dfrac{X-100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ et que $P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) - 1$.

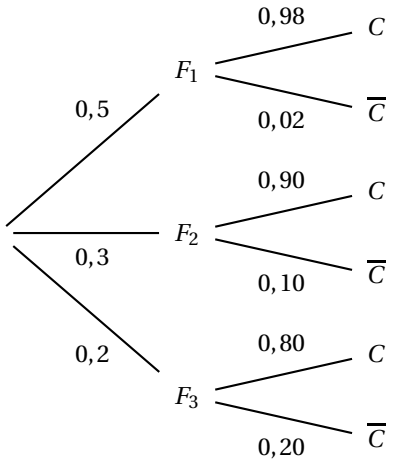
Cherchons u tel que $2P(Z \leq u) - 1 = 0,97$, soit $P(Z \leq u) = 0,985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2,1701$ à 10^{-4} près.

Ainsi, $\dfrac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \dfrac{2}{u} \simeq 0,9216$ à 10^{-4} près.

Il faut absolument retenir le lien entre la probabilité sur un intervalle centré $P(Z \in [-u_\alpha;\ u_\alpha]) = 1 - \alpha$ et la valeur de la fonction de répartition :
$P(Z \leq u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
On peut retrouver rapidement cette formule en faisant un petit dessin permettant de déterminer les probabilités des queues de distribution, toutes deux égales à $\dfrac{\alpha}{2}$.

Partie B Contrôle à la réception

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \dfrac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.
Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

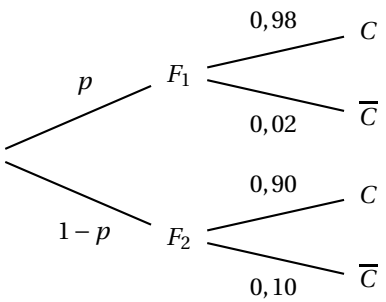
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0,92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0,49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \dfrac{0,49}{0,92} \simeq 0,5326$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :



En reprenant la formule des probabilité totale, on cherche p tel que $P(C) = 0,92$, ce qui s'écrit :

$$0,98p + 0,9(1-p) = 0,92 \iff 0,08p = 0,02$$
$$\iff p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.

Exercice 4

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0;\ +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

   On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
   Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
   D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
   Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
   Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
   0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2;\ 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0;\ +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0;\ +\infty[$.

   Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. **a.** f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.
Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 :\\
&= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1)\\
&= \frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3)\\
&= \frac{1}{x^2}u(x)
\end{aligned}$$

b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha;\ +\infty]$.

Partie C

1. Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& f(x)\\ y &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ f(x) &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ 0 &=& f(x)-\ln(x)\end{array}\right.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x :\\
&= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)\right]\\
&= \frac{1}{x}\left[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)\right]\\
&= \frac{1}{x}(2-\ln(x))
\end{aligned}$$

Or $2-\ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = \mathrm{e}^2$.
Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = \mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\\
&= 2\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

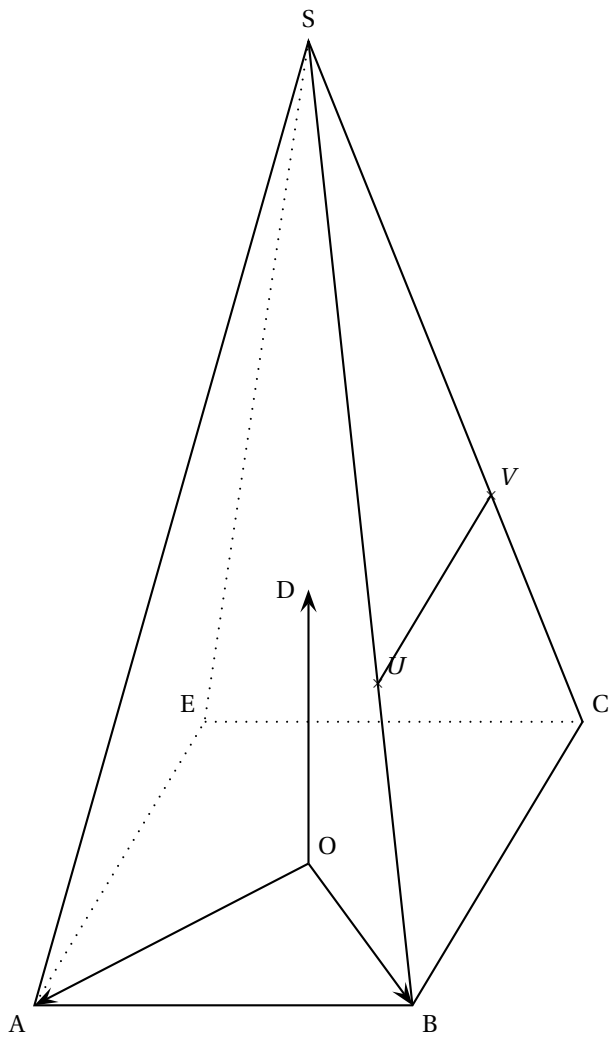
Or ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= 2\left[\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} - \left[H(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2}\\
&= 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)-\ln(1)\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2-\ln(1)^2\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

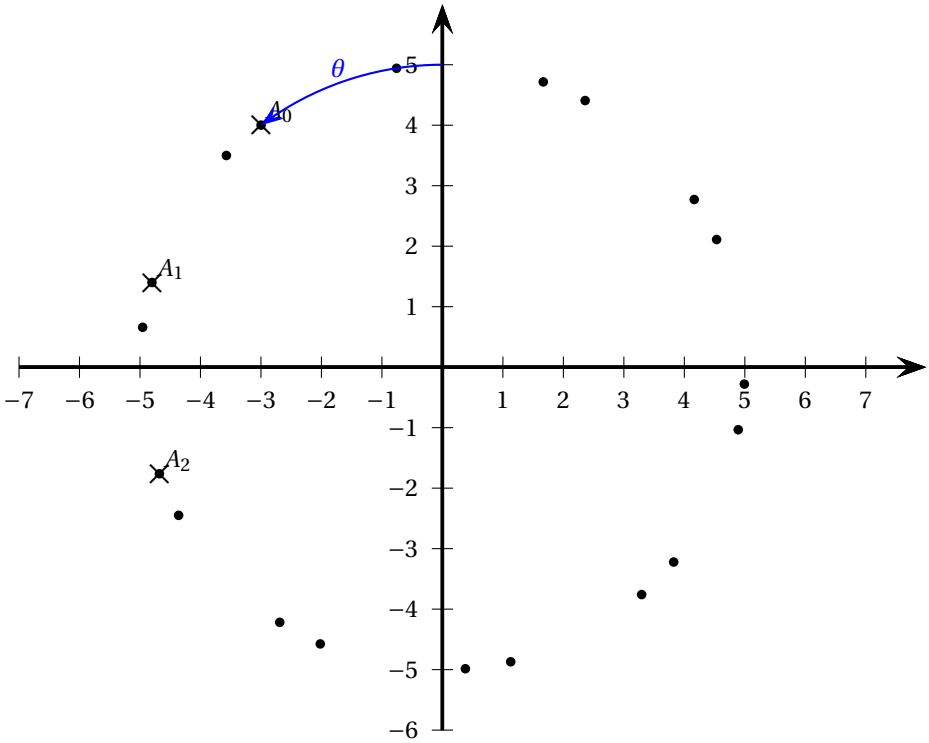
L'aire délimitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$ est donc égale à 2.

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Centres étrangers 10 juin 2015

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $p = 0,03$ et $n = 500$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,015\,;\,0,045]$$

La fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0,038$; $f \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

Remarque – En fait le corrigé de cette question répond plus à une question du type : « Le fournisseur affirme que le stock comporte 3 % de cadenas défectueux. Est-ce qu'il faut remettre en doute cette affirmation ? »
La question posée dans le sujet parle de « plus de 3 % de cadenas défectueux ». Cela veut dire qu'un test par intervalle de fluctuation asymptotique (test bilatéral) n'est sans doute pas le plus adapté à cette question. Que pourrait-on en effet répondre si la fréquence de cadenas défectueux était très faible, voire nulle ? Pourtant, dans ce cas, le fournisseur aurait livré un « bon » lot de cadenas, mais la fréquence de cadenas défectueux dans ce lot ne serait pas dans l'intervalle de fluctuation.

Dans le cas de ce sujet, pour répondre correctement à la question, il faudrait pratiquer un test unilatéral... totalement hors du programme de la classe de terminale S.

2. La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon de taille $n = 500$ observé est $f = \dfrac{39}{500} = 0,078$.
Les trois conditions $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 39 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$ sont vérifiées.
Donc un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est donné par :

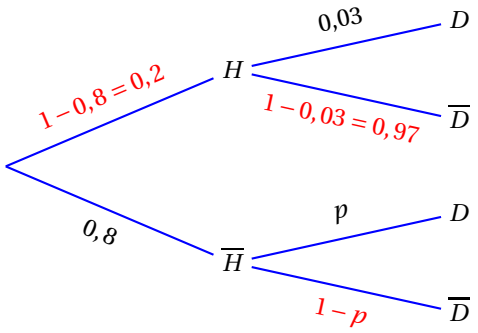
$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\, 0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,033\,;\,0,123]$$

Partie B

1. Le nombre de cadenas *premier prix* est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 725$ et d'écart type $\sigma = 25$. On cherche $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
Or $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$; on cherche donc $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ dont on connaît une valeur approchée au centième : 0,68 (d'après le cours).
Pour avoir le résultat au millième, on utilise la calculatrice : $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0,683$
2. On cherche le plus petit entier n tel que $P(X > n) < 0,05$; or $P(X > n) < 0,05 \iff P(X \leqslant n) \geqslant 0,95$
Pour $P(X \leqslant b) = 0,95$, on obtient à la calculatrice : $b \approx 791,12$.
Donc le plus petit nombre n de cadenas nécessaires en début de mois pour avoir une probabilité de rupture de stock inférieure à 0,05 est $n = 792$.

Partie C

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p = 0,006 + 0,8p$
On sait que 7 % des cadenas sont défectueux donc $P(D) = 0,07$.
Donc : $0,07 = 0,006 + 0,8p \iff \dfrac{0,07 - 0,006}{0,8} = p \iff p = 0,08$
Le résultat obtenu est cohérent avec la question A.2 car $0,08 \in [0,033 ; 0,123]$.

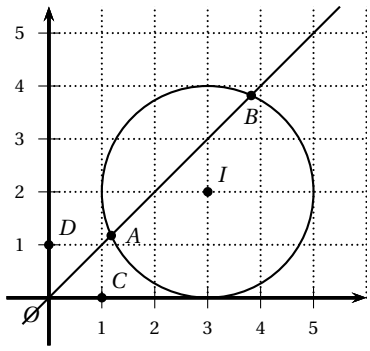
3. Le cadenas prélevé est en bon état.
La probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme* est $P_{\overline{D}}(H)$:
$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx 0,209$$

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB] – **VRAI**
Soit M le point d'affixe z.

- $|z-1| = |z-\mathrm{i}| \iff MC = MD$ où C est le point d'affixe 1 et D est le point d'affixe i.
  L'ensemble des points M tels que $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$ est donc la médiatrice du segment $[CD]$. C'est donc la droite d'équation $y = x$, donc la droite (AB).
- $|z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2 \iff MI \leqslant 2$ où I est le point d'affixe $3+2\mathrm{i}$.
  L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2$ est donc le disque $\mathscr{D}$ de centre I et de rayon 2.
- L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant à la fois $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$ et $|z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2$ est l'intersection de la droite (AB) et du disque $\mathscr{D}$; c'est donc le segment $[AB]$.



2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel – **FAUX**
Pour qu'un nombre non nul soit réel, il faut et il suffit qu'il ait pour argument 0 ou π, à 2π près.
On écrit le nombre $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle : $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, donc $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ a pour argument $\dfrac{\pi}{6}$; on en déduit que $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ a pour argument $1515 \times \dfrac{\pi}{6}$.
Or $\dfrac{1515\pi}{6} = 126 \times 2\pi + \dfrac{3\pi}{6}$ donc $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ a pour argument $\dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.
Donc $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un imaginaire pur non nul, donc ce n'est pas un réel.

3. Affirmation 3 :

une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. – **VRAI**

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

On regarde si le point E appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle $\left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& 2t \\ 1 &=& -3+4t \\ -3 &=& 7-10t \end{array}\right.$ La valeur $t = 1$ convient.

On regarde si le point F appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle $\left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& 2t \\ -1 &=& -3+4t \\ 2 &=& 7-10t \end{array}\right.$ La valeur $t = \dfrac{1}{2}$ convient.

Donc la droite (EF) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50°– **VRAI**

Pour déterminer une mesure de l'angle $\widehat{FEG}$, on va utiliser le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(-1\,;-2\,;5)$ et $\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(-3\,;2\,;4)$;

donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = -1\times(-3)+(-2)\times 2+5\times 4 = 19$

On sait aussi que $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = EF\times EG\times\cos\widehat{FEG}$.

On calcule $EF^2 = 1+4+25 = 30$ donc $EF = \sqrt{30}$ et $EG^2 = 9+4+16 = 29$ donc $EG = \sqrt{29}$.

On a donc $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}}{EF\times EG} = \dfrac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} \approx 0,644$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\widehat{FEG} \approx 49,9\,°$ dont $50\,°$ est une valeur arrondie au degré près.

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul. Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& a \\ u_{n+1} &=& \mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{array}\right.$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n}-1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-x$
   - **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1$.
     Or $\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right) = 2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}-1 = 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1$
     Donc $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right)$.
   - **b.** Les variations de la fonction g dépendent du signe de g' sur $\mathbb{R}$.
     Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$ donc $2\mathrm{e}^{x}+1>0$; donc $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{x}-1$:
     $\mathrm{e}^{x}-1>0 \iff \mathrm{e}^{x}>1 \iff x>0$
     $g(0) = \mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{0}-0 = 0$
     La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et admet un minimum égal à 0 pour $x = 0$.
   - **c.** $u_{n+1}-u_n = \mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n}-u_n = g(u_n)$.
     Or la fonction g a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$ donc $g(u_n)\geqslant 0$ pour tout n et donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ pour tout n. La suite (u_n) est donc croissante.
2. Dans cette question, on suppose que $a\leqslant 0$.
   - **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n\leqslant 0$.
     - $u_0 = a$; or $a\leqslant 0$ donc $u_0\leqslant 0$. La propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p \leqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On sait que $u_{p+1} = \mathrm{e}^{u_p}(\mathrm{e}^{u_p} - 1)$
  D'après l'hypothèse de récurrence, $u_p \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_p} \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{u_p} - 1 \leqslant 0$.
  Comme $\mathrm{e}^{u_p} > 0$ on déduit que $u_{p+1} \leqslant 0$ et la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété $u_n \leqslant 0$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

b. La suite est croissante donc, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$.
Si $a = 0$, $u_0 = 0$; comme, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$ donc $u_n \geqslant 0$.
Or on a vu que, pour tout n, $u_n \leqslant 0$.
Donc pour tout n, $u_n = 0$.
On peut déduire que la suite (u_n) est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout n, $u_n \geqslant a$; comme $a > 0$, on peut en déduire que, pour tout n, $u_n > 0$.

a. On a vu que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
Or $0 < a \leqslant u_n$ pour tout n ; on sait que la fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $g(0) < g(a) \leqslant g(u_n)$ et donc $g(u_n) \geqslant g(a)$ pour tout n.
On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

- Pour $n = 0$, $u_0 = a$ et $a + n \times g(a) = a + 0 = a$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p \geqslant a + p \times g(a)$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On sait que $u_{p+1} - u_p \geqslant g(a)$; or $u_p \geqslant a + p \times g(a)$ (HR). Donc $u_{p+1} \geqslant a = p \times g(a) + g(a)$ ce qui équivaut à $u_{p+1} \geqslant a + (p+1) \times g(a)$.
  La propriété est donc vraie au rang $p+1$.
- La propriété $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

c. $a > 0$ donc $g(a) > 0$ car 0 est le minimum de la fonction g, atteint en 0.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$
Comme $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$, on peut déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif.

a. On complète l'algorithme :

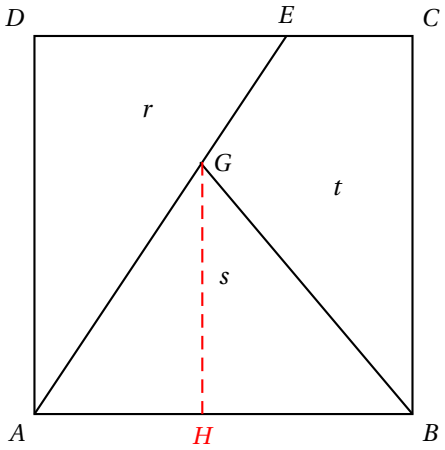
Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leqslant M$ u prend la valeur $\mathrm{e}^{2u} - \mathrm{e}^{u}$ n prend la valeur $n+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

b. On suppose $M = 60$. On trouve à la calculatrice $u_{35} \approx 2,13$ et $u_{36} \approx 62,35$; donc la valeur affichée par l'algorithme pour $M = 60$ est 36.

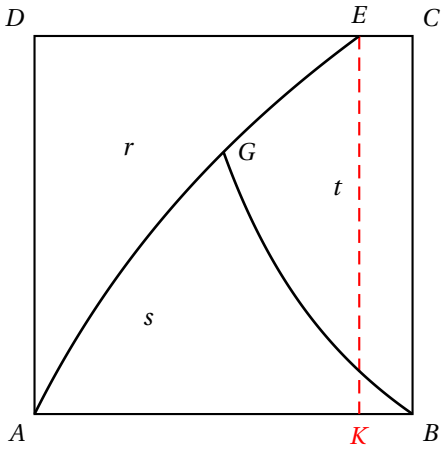
Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

- Le point E est situé sur la droite (CD) donc son ordonnée vaut 1.
  Le nombre r est l'aire du triangle ADE qui est égale à $\dfrac{AD \times DE}{2}$.
  De plus, cette aire doit valoir $\dfrac{1}{3}$ et on sait que $AD = 1$.
  Donc $\dfrac{AD \times DE}{2} = \dfrac{1}{3}$ entraîne $DE = \dfrac{2}{3}$.
  Les coordonnées de E sont donc $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG ; donc GH est l'ordonnée du point G.
  L'aire s du triangle ABG est : $\dfrac{AB \times GH}{2}$. Or $AB = 1$ et $s = \dfrac{1}{3}$, donc : $\dfrac{1 \times GH}{2} = \dfrac{1}{3}$ donc $GH = \dfrac{2}{3}$.
  L'ordonnée y_G de G est $\dfrac{2}{3}$.
  Le point G est situé sur la droite (AE). Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$. Donc la droite (AE) a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x$.
  $G \in (AE)$ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$ donc $y_G = \dfrac{3}{2}x_G$. Comme $y_G = \dfrac{2}{3}$, on déduit que $x_G = \dfrac{4}{9}$.
  Le point G a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Partie B : étude de la proposition B

1. **a.** D'après le texte, l'ordonnée y_E du point E est égale à 1 et ce point appartient à $\mathscr{C}_f$ donc
   $f(x_E) = y_E \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = \mathrm{e} \iff x_E = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}$

   b. L'abscisse du point G vaut 0,5 et le point G appartient à $\mathscr{C}_f$; donc :
   $f(x_G) = y_G \iff f(0,5) = y_G \iff \ln 2 = y_G$
   Le point G appartient aussi à $\mathscr{C}_g$ donc :

$g(x_G) = y_G \iff k\left(\dfrac{1-x_G}{x_G}\right) = y_G \iff k\left(\dfrac{1-0,5}{0,5}\right) = \ln 2 \iff k = \ln 2$

2. **a.** Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = (x+0,5)\times\ln(2x+1) - x$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$F'(x) = 1\times\ln(2x+1) + (x+0,5)\times\dfrac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + 1 - 1 = \ln(2x+1) = f(x)$
Donc f a pour primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Comme le point E a pour abscisse $\dfrac{\text{e}-1}{2}$, et que la fonction f est positive, l'aire sous la courbe entre 0 et $\dfrac{\text{e}-1}{2}$ est donnée par :
$\displaystyle\int_0^{\frac{\text{e}-1}{2}} f(x) = \text{d}x = [F(x)]_0^{\frac{\text{e}-1}{2}} = F\left(\dfrac{\text{e}-1}{2}\right) - F(0) = \dfrac{\text{e}}{2}\ln\text{e} - \dfrac{\text{e}-1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}$
L'aire du rectangle $ADEK$ est $AD\times DE = 1\times\dfrac{\text{e}-1}{2} = \dfrac{\text{e}-1}{2}$.
Donc $r = \dfrac{\text{e}-1}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\text{e}}{2} - 1$

3. $g(x) = \ln 2\times\dfrac{1-x}{x} = \ln 2\times\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$
Donc une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est donnée par : $G(x) = \ln 2\times(\ln x - x)$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
$r = \dfrac{\text{e}}{2} - 1 \approx 0,36 \in\,]0,3\,;\,0,4[$.
$s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2} \approx 0,33 \in\,]0,3\,;\,0,4[$
$t = 1 - r - s \approx 0,31 \in\,]0,3\,;\,0,4[$
Donc la proposition B vérifie les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.
Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » et notés en abrégé « TP ».

Partie A : généralités

1. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP ; alors $x^2 + y^2 = z^2$. Soit p un entier naturel non nul.
Alors $p^2\times x^2 + p^2\times y^2 = p^2\times z^2$ ce qui équivaut à $(px)^2 + (py)^2 = (pz)^2$.
Donc $(px,\ py,\ pz)$ est aussi un TP.

2. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP.
On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
$\left.\begin{array}{l} x \text{ impair} \Leftrightarrow x^2 \text{ impair} \\ y \text{ impair} \Leftrightarrow y^2 \text{ impair}\end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 + y^2 \text{ pair} \iff z^2 \text{ pair} \iff z \text{ pair}$
Donc x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance α de 2 par un entier impair k : $n = 2^\alpha\times k$

a. La décomposition en facteurs premiers de 192 est $2^6\times 3$; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont $x = 2^\alpha\times k$ et $z = 2^\beta\times m$.
$x = 2^\alpha\times k \Longrightarrow x^2 = 2^{2\alpha}\times k^2 \Longrightarrow 2x^2 = 2^{2\alpha+1}\times k^2$
$z = 2^\beta\times m \Longrightarrow z^2 = 2^{2\beta}\times m^2$

c. Pour que les deux nombres $2x^2$ et z^2 soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique) ; l'un a pour *décomposition* $2^{\alpha+1} \times k^2$ et l'autre $2^{\beta} \times m^2$.

Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car $2\alpha+1$ est impair et 2β est pair.

Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015 = 5 \times 13 \times 31$; on en déduit que $2015 = 5 \times 403$.

On sait que $(3,\ 4,\ 5)$ est un TP donc, d'après la question **1.** $(3 \times 403,\ 4 \times 403,\ 5 \times 403)$ est aussi un TP.

Donc $(1209,\ 1612,\ 2015)$ est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.

Si $2n+1 = 2015$, alors $n = 1007$.

Pour $n = 1007$, on a : $(2n^2+2n)^2 = 2030112$ et $(2n^2+2n+1)^2 + 1 = 2030113$.

Donc $(2015,\ 2030112,\ 2030113)$ est un TP.

3. **a.** On cherche deux entiers x et z tels que : $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 403^2$; or $403^2 = 169 \times 961$. Donc $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 169 \times 961$.

Les nombres x et z tels que $\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169 \\ z+x &=& 961 \end{array}\right.$ répondent à la question.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169 \\ z+x &=& 961 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 961-169 \\ 2z &=& 169+961 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 792 \\ 2z &=& 1130 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 396 \\ z &=& 565 \end{array}\right.$$

Donc $565^2 - 396^2 = 403^2$.

b. D'après la question **B 3.a)** : $396^2 + 403^2 = 565^2$; on en déduit que $(396,\ 403,\ 565)$ est un TP.

En multipliant par 5 on obtient le TP cherché : $(5 \times 396,\ 5 \times 403,\ 5 \times 565) = (1980,\ 2015,\ 2825)$.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AI} \iff B(6\,;\,0\,;\,0)$;

   $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AJ} \iff D(0\,;\,4\,;\,0)$;

   $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} \iff \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AK} \iff K(0\,;\,0\,;\,2)$.

   Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK}$, donc G(6; 4; 2). On en déduit que $\overrightarrow{IG}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{JG}(6\,;\,3\,;\,2)$.

   Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IG} = -2+2+0 = 0$ et

   $\vec{n}\cdot\overrightarrow{JG} = 12+6-18 = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.

2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z+d = 0$.

   En particulier : $I(1\,;\,0\,;\,0) \in (IJG) \iff 2+0-0+d = 0 \iff d = -2$.

   Une équation du plan (IJG) est : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z-2 = 0$.

3. On a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, donc F(6; 0; 2).

   Or $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BF) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF} \iff$

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x-6 & = & t(6-6) \\ y-0 & = & t(0-0) \\ z-0 & = & t(2-0) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

   Donc si $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \cap (BF)$ ses coordonnées vérifient le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2t \\ 2x+2y-9z-2 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2\times 6+0-9\times 2t-2 = 0 \iff 10-18t = 0 \iff 10 = 18t \iff t = \frac{5}{9}.$$

   En remplaçant t par $\dfrac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :

   $L\left(6\,;\,0\,;\,\dfrac{10}{9}\right)$.

4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).

   La section avec (ABFE) est la droite (IL).

   La section avec (BCGF) est la droite (LG).

   Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IJ) et (GP) sont parallèles.

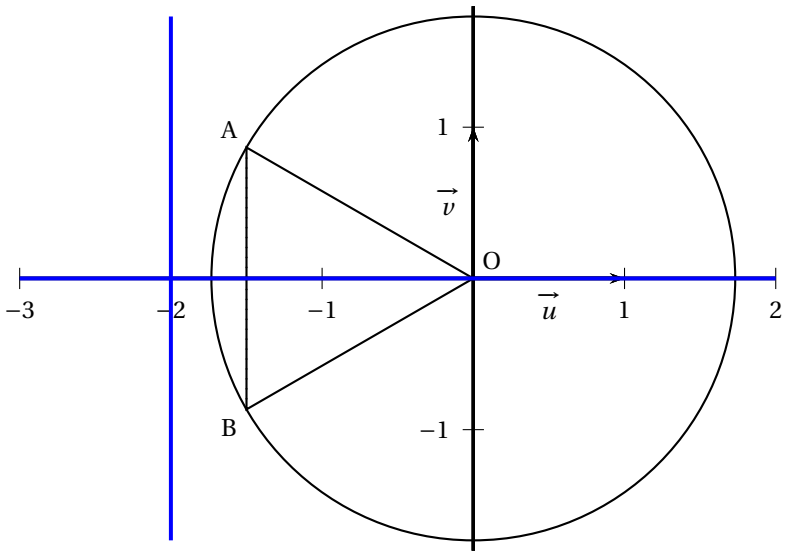
   On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.

   La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2+4z+3 = z \iff z^2+3z+3 = 0$.
   $\Delta = 3^2 - 4\times 3 = 9-12 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.
   Cette équation a deux solutions :
   $z_1 = \dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   On a $|z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}$.
   Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.
   On a donc $z_1 = \dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
   On trouve de la même façon que $z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
2. On a $z_{\mathrm{A}} = z_2$, donc $|z_{\mathrm{A}}| = \mathrm{OA} = |z_2| = \sqrt{3}$.
   De même $z_{\mathrm{B}} = z_1$, donc $|z_{\mathrm{B}}| = \mathrm{OB} = |z_1| = \sqrt{3}$.
   Enfin $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = \left|\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \left(\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.
   On a donc $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.
3. Soit $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ son point associé.
   M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.
   Or on sait que l'affixe du point M est :
   $z^2+4z+3 = (x+\mathrm{i}y)^2+4(x+\mathrm{i}y)+3 = x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+4x+4\mathrm{i}y+3 = x^2-y^2+3+\mathrm{i}(2xy+4y)$.
   On a donc $y' = 0 \iff 2xy+4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x+2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$
   Conclusion : l'ensemble $\mathscr{E}$ est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).
4.



EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. On sait que $P\left(\mu_1 - 2\sigma_1 \leqslant X_1 \leqslant \mu_1 + 2\sigma_1\right) \approx 0,95$, soit $P\left(1,53 \leqslant X_1 \leqslant 1,77\right) \approx 0,95$.
2. **a.** On sait que $P\left(X_2 \geqslant 170\right) = 0,5 + P\left(170 \leqslant X_2 \leqslant 175\right) \approx 0,5 + 0,18 \approx 0,68$.

   b. Soit F l'évènement « la personne choisie est une femme » et S l'évènement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». On a $P(F) = 0,52$ et donc $P\left(\overline{F}\right) = 0,48$. La probabilité cherchée est $P_S(F)$.

   De même qu'à la question **2. a.** la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre est

   $P\left(X_1 \geqslant 170\right) = 0,5 - P\left(165 \leqslant X_2 \leqslant 170\right) \approx 0,2$. Soit $P_F(S) \approx 0,2$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P(S) = P(S \cap F) + P\left(S \cap \overline{F}\right) = P(F) \times P_F(S) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(S) \approx 0,52 \times 0,2 + 0,48 \times 0,68 \approx 0,4304$.

   Donc $P_S(F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(S)} = \dfrac{P_F(S) \times P(F)}{P(S)} \approx \dfrac{0,2 \times 0,52}{0,4304} \approx \dfrac{0,104}{0,4304} \approx 0,24$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Modélisation

1. On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1) = 0$.
   Or f est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(a - ax - b)$.
   Donc $f'(1) = 0 \iff \mathrm{e}^{-1}(a-a-b) = 1 \iff -b\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff b = 0$, car $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$.
2. Le haut de la courbe est obtenu pour $x = 1$. Or :
   $3,5 < f(1) < 4 \iff 3,5 < a\mathrm{e}^{-1} < 4 \iff 3,5\mathrm{e} < a < 4\mathrm{e}$.
   Or $3,5\mathrm{e} \approx 9,5$ et $4\mathrm{e} \approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a = 10$.
   On a donc sur $[1\,;\,8]$, $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

1. En dérivant g comme un produit, on a pour tout réel de $[1\,;\,8]$:
   $g'(x) = 10\times(-1)\mathrm{e}^{-x} + 10(-x-1)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = -10\mathrm{e}^{-x}(1-x-1) = 10x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
   g est donc une primitive de f sur $[1\,;\,8]$.
2. Comme $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[1\,;\,8]$. Donc l'aire de la surface hachurée est égale en unités d'aire $\left(\text{soit } 1\times 1 = 1\text{ m}^2\right)$ à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_1^8 = g(8) - g(1) = 10(-8-1)\mathrm{e}^{-8} - 10(-1-1)\mathrm{e}^{-1} = 20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}$.
   D'après les conditions du peintre son devis sera donc d'un montant de :
   $D = 300 + 50\left(20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}\right) \approx 666,37$ €.

Partie C Une contrainte à vérifier

1. La fonction f' est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle $[1\,;\,8]$:
   $f''(x) = 10\times(-1)\mathrm{e}^{-x} + 10(1-x)\times(-1)10\mathrm{e}^{-x} = 10\mathrm{e}^{-x}(-1-1+x = 10(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$.
   - Si $1 \leqslant x < 2$, $x - 2 < 0$: la fonction f' est donc décroissante sur $[1\,;\,2[$;
   - Si $2 < x \leqslant 8$, $x - 2 > 0$: la fonction f' est donc croissante sur $]2\,;\,8[$;
   - Si $x = 2$, $f'(2) = -10\mathrm{e}^{-2} \approx -1,35$ est donc le minimum de la fonction f' sur $[1\,;\,8]$.
2. Une équation de la tangente (T_M) au point $M(x\,;\,y)$ est :
   $P(X\,;\,Y) \in (T_M) \iff Y - f(x) = f'(x)(X - x)$.
   Le point L est le point de cette droite d'ordonnée nulle donc son abscisse X vérifie :
   $-f(x) = f'(x)(X-x) \iff X - x = \dfrac{-f(x)}{f'(x)} \iff X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   Dans le triangle MLP, on $\tan\alpha = \dfrac{PM}{PL} = \dfrac{f(x)}{\left|x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - x\right|} = \dfrac{f(x)}{\left|-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right|} =$
   $|-f'(x)| = |f'(x)|$.
3. On a vu dans l'étude de la fonction f' que celle-ci décroit de $f'(1) = 10(1-1)\mathrm{e}^{-1} = 0$ à $-1,35$ puis croissante de $f'(2)$ à $f'(8) = 10(1-8)\mathrm{e}^{-8} = -70\mathrm{e}^{-8} \approx -0,023$.
   Le maximum de la fonction $|f'(x)|$ est donc $1,35 \approx \tan 53,47\,°$
   Cette valeur est bien inférieure à la valeur 55 °. Le e toboggan est conforme.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur v
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire
	v prend la valeur $\ln\left(2-\mathrm{e}^{v_n}\right)$
	S prend la valeur $S+v$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} = \left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right) =$
$2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2-\dfrac{1}{u_n}$.

2. D'après le résultat précédent :
$u_2 = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$;
$u_3 = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$;
$u_4 = 2-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

3. Démonstration par récurrence :
Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;
Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $p > 4$ tel que $u_p = \dfrac{p+1}{p}$.
On a $u_{p+1} = 2-\dfrac{1}{u_p} = 2-\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{2p+2-p}{p+1} = \dfrac{p+2}{p+1}$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n} \iff v_n = \ln u_n$.
De la question précédente on peut écrire :
$v_n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1)-\ln n = -\ln n+\ln(n+1)$.

2. $S_3 = v_1+v_2+v_3 = -\ln 1+\ln 2-\ln 2+\ln 3-\ln 3+\ln 4 = \ln 4-\ln 1 = \ln 4$ (ou $2\ln 2$).

3. $S_n = v_1+v_2+\cdots+v_n = -\ln 1+\ln 2-\ln 2+\ln 3-\ln 3+\ln 4+\cdots-\ln(n-1)+\ln n-\ln n+\ln(n+1) =$
$-\ln 1+(\ln 2-\ln 2)+(\ln 3-\ln 3)+(\ln 4-\ln 4)+\cdots+(\ln(n-1)-\ln(n-1))+(\ln n-\ln n)+\ln(n+1) =$
$-\ln 1+\ln(n+1) = \ln(n+1)$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

$A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = A^2$

2. En partant de l'égalité $A^2 = A + 2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :
$A^3 = A(A+2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$ et on recommence :
$A^4 = A \times A^3 = A(3A+2I) = 3A^2 + 2A = 3(A+2I) + 2A = 5A + 6I$

3. Démonstration par récurrence

- *Initialisation :* Pour $n = 0$, $A^0 = I = 0A + 1I = r_0 A + s_0 I$. la relation est vraie au rang 0.
- *Hérédité :* Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_p A + s_p I$. En multipliant chaque membre par A, on obtient :
  $A \times A^p = A\left(r_p A + s_p I\right) \iff A^{p+1} = r_p A^2 + s_p A = r_p(A+2I) + s_p A =$
  $\left(r_p + s_p\right) A + 2r_p I = r_{p+1} A + s_{p+1} I$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
- On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n,
  $A^n = r_n A + s_n I$.

4. On a pour tout entier naturel n non nul :
$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -(r_n - s_n) = -k_n$.
L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1.
On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n$.

5. $r_1 = r_0 + s_0 = 1$ donc $t_1 = r_1 + \dfrac{(-1)^1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

On sait qu'alors pour tout $n \geqslant 1$, $t_n = t_1 \times q^{n-1} = \dfrac{2}{3}2^{n-1} = \dfrac{1}{3}2^n$

6. On a donc $r_n = t_n - \dfrac{(-1)^n}{3} = \dfrac{1}{3}(-1)^n - \dfrac{(-1)^n}{3}$
Pour tout $n \geqslant 1$, $k_n = r_n - s_n$ et $k_n = -(-1)^n$; on en déduit que
$s_n = r_n + (-1)^n = \dfrac{1}{3}2^n - \dfrac{1}{3}(-1)^n + (-1)^n = \dfrac{1}{3}2^n + \dfrac{2}{3}(-1)^n$

7. $A_n = r_n A + s_n I$ donc $A_n = \begin{pmatrix} -4r_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}$

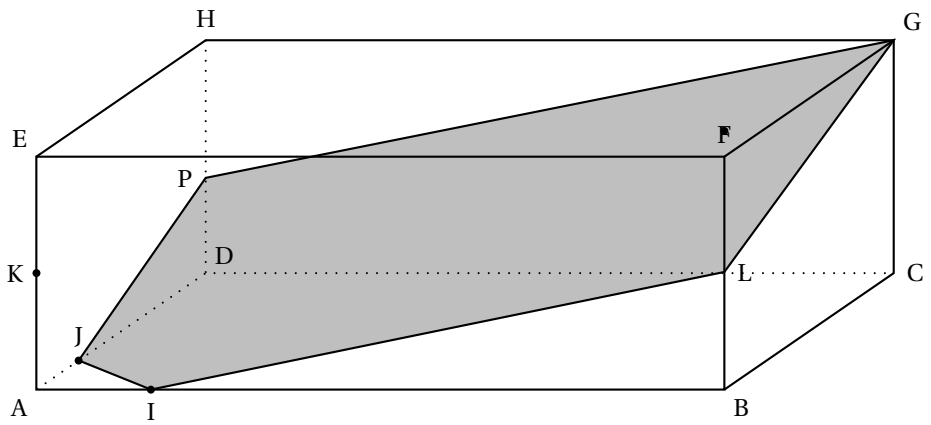
- $-4r_n + s_n = -\dfrac{4}{3}2^n + \dfrac{4}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3}2^n + \dfrac{2}{3}(-1)^n = -2^n + 2(-1)^n$
- $6r_n = \dfrac{6}{3}2^n - \dfrac{6}{3}(-1)^n = 2^{n+1} - 2(-1)^n$
- $-3r_n = -3\left(\dfrac{1}{3}2^n - \dfrac{1}{3}(-1)^n\right) = -2^n + (-1)^n$
- $5r_n + s_n = \dfrac{5}{3}2^n - \dfrac{5}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3}2^n + \dfrac{2}{3}(-1)^n = 2 \times 2^n - (-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$

Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1



Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Asie 16 juin 2015

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

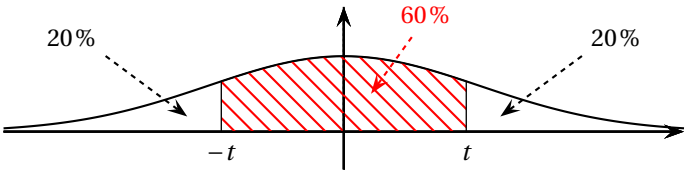
Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible.
   Pour un tir, la probabilité du succès est $p = 0,8$.
   On répète 4 fois de façon indépendante le tir, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.
   Pour une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On cherche ici :
   $$P(X \geqslant 3) = P(x = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$$
   $$\approx 0,819$$
2. La concurrent tire n flèches de façon indépendante ; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.
   Pour atteindre en moyenne 12 fois la cible, il faut que l'espérance mathématique de la variable X soit égale à 12. Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $E(X) = np$.
   On doit donc chercher n pour que $n \times 0,8 = 12 \iff n = \dfrac{12}{0,8} \iff n = 15$.
   Il faut donc que le concurrent prévoie 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.

Partie B

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Pour que la flèche soit hors de la bande grisée, il faut que $(X < -10)$ ou $(X > 10)$.
   On cherche donc $P\Big((X < -10) \cup (X > 10)\Big)$ qui est égale à $1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10)$.
   X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 10$, et on sait que pour toute loi normale, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$ donc $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,683$.
   On peut donc dire que la probabilité que la flèche soit hors de la bande grisée est approximativement de $1 - 0,683 = 0,317$.
   On peut également trouver ce résultat en utilisant la calculatrice.
2. On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6$. Cela correspond au schéma suivant, en tenant compte des propriétés de symétrie de la fonction de densité de la loi normale :



$$\begin{array}{lrcl}
P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6 \iff & P(X \leqslant t) - P(X \leqslant -t) & = & 0,6 \\
\iff & P(X \leqslant t) - P(X \geqslant t) & = & 0,6 \\
\iff & P(X \leqslant t) - (1 - P(X \leqslant t)) & = & 0,6 \\
\iff & 2P(X \leqslant t) - 1 & = & 0,6 \\
\iff & 2P(X \leqslant t) & = & 1,6 \\
\iff & P(X \leqslant t) & = & 0,8
\end{array}$$

À la calculatrice, on trouve $t \approx 8,416$.

Les deux droites verticales délimitant la bande grise ont pour équations $x = -8,4$ et $x = 8,4$; alors la probabilité d'atteindre cette bande grisée est approximativement de 0,6.

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

D'après le cours, on peut dire que $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\,\text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$ et que

$P(T \geqslant t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \left(1 - \text{e}^{-\lambda t}\right) = \text{e}^{-\lambda t}$.

1. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures est $P(T \geqslant 2000)$.
   $P(T \geqslant 2000) = \text{e}^{-10^{-4}\times 2000} \approx 0,819$
2. *Restitution organisée des connaissances*
   Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t$.

   a. On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda t}$.
   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $F'(x) = -1 \times \text{e}^{-\lambda t} + \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda)\,\text{e}^{-\lambda t} = -\text{e}^{-\lambda t} + \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t} + \text{e}^{-\lambda t} = \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t} = f(t)$
   Donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire T est :
   $$E(T) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\,\text{e}^{-\lambda t}\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\text{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(F(x) - F(0)\right)$$
   $$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)\text{e}^{-\lambda x}\right] - \left[-\frac{1}{\lambda}\times 1\right]\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x\,\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$
   $$\lim_{x\to+\infty} -x\,\text{e}^{-\lambda x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} \text{ donc } E(T) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

   - $\left.\begin{array}{l}\lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\text{e}^X}{X} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{e}^{\lambda x}}{\lambda x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{\text{e}^{\lambda x}} = 0$
   - $\left.\begin{array}{l}\lambda > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\text{e}^{-X} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\text{e}^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} = 0$
   - Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-x\,\text{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\text{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$ soit 10 000 heures.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

   Le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$: $(1\,;1\,;1)$ et le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$: $(7\,;-2\,;1)$.
   $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 7-2+1 = 6 \neq 0$ donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

   Affirmation 1 : FAUSSE

2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

   On a vu dans la question précédente que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ avaient respectivement pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$: $(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{n_2}$: $(7\,;-2\,;1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont donc sécants.

   Soit d la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   Pour voir si cette droite est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, il suffit de déterminer deux points de cette droite et de vérifier s'ils appartiennent aux deux plans.

   - En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $A\,(0\,;1\,;4)$. Or $x_A+y_A+z_A-5 = 0+1+4-5 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}_1$, et $7x_A-2y_A+z_A-2 = 0-2+4-2 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}_2$. On peut dire que $A \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.
   - En remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $B\,(1\,;3\,;1)$. Or $x_B+y_B+z_B-5 = 1+3+1-5 = 0$ donc $B \in \mathscr{P}_1$, et $7x_B-2y_B+z_B-2 = 7-6+1-2 = 0$ donc $B \in \mathscr{P}_2$. On peut dire que $B \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

   L'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est la droite (AB) de représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation 2 : VRAIE

3. **Affirmation 3 :** au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0{,}658\,;0{,}771]$.

   Le joueur gagne avec une fréquence de $f = \dfrac{223}{312} \approx 0{,}7147$.
   L'échantillon est de taille $n = 312 > 30$; $n \times f = 223 > 5$ et $n \times (1-f) = 89 > 5$.
   Donc on peut déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}\,;\frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}}\right] \approx [0,658\,;0,771]$$

   Affirmation 3 : VRAIE

   Remarque du correcteur – En fait, les deux bornes de l'intervalle ont pour valeurs approchées à 10^{-4} les nombres 0,658 1 et 0,771 4 ; la règle veut que l'on arrondisse par défaut la borne inférieure, et par excès la borne supérieure, pour que l'intervalle obtenu contienne l'intervalle donné par la formule ; l'intervalle obtenu serait alors $[0{,}658\,;0{,}772]$ ce qui rendrait l'affirmation fausse.

   Mais était-ce vraiment l'intention du concepteur du sujet de « jouer » sur la troisième décimale ? Il faudrait, pour en être sûr, avoir les consignes de correction.

4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

On fait tourner l'algorithme avec les valeurs de a, de b et l'expression de f données dans le texte, et on va décrire ce qui se passe à chaque étape en affichant l'état des variables a, b et x :

	a	b	x
a reçoit la valeur 1	1		
b reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc a prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc b prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leqslant 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

Affirmation 4 : FAUSSE

Il s'agit de l'algorithme de recherche par dichotomie de la solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

Exercice 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. • On sait que, pour tout X, $\mathrm{e}^X > 0$ donc $\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
   Sur $[0\,;\,1]$, $x \geqslant 0$, donc $x + \mathrm{e}^{n(x-1)} > 0 \iff f_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   • f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = 1 + n\,\mathrm{e}^{n(x-1)}$.
   Pour pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\,\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$ donc $f_n'(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
2. $f_n(1) = 1 + \mathrm{e}^0 = 2$ donc toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point A de coordonnées $(1\,;\,2)$.
3. À l'aide des représentations graphiques, on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$ est égal à $f_n'(x_{\text{A}}) = f_n'(2) = 1 + n\,\mathrm{e}^n$.
   $$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to+\infty} n &=& +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n &=& +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{e}^n \overset{\text{par produit}}{=} +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n'(2) = +\infty$$

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$ donc la suite (u_n) est constante et chacun de ses termes est égal à 2 ; la suite (u_n) admet donc le nombre 2 comme limite.
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$.
   $x \in [0\,;\,1[\Longrightarrow x - 1 < 0$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n(x-1)} = 0$ (limite de fonctions composées)
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x + \mathrm{e}^{n(x-1)}\right) = x$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques et particulièrement en regardant l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{100}$, on peut conjecturer que la limite de la suite A_n est $\dfrac{1}{2}$.
Pour démontrer cette conjecture, on cherche une primitive de la fonction f_n : pour $n > 0$, la fonction F_n définie par $F_n(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{n(x-1)}}{n}$ est une primitive de f_n sur $[0\,;\,1]$.
La fonction f_n est positive sur $[0\,;\,1]$ donc l'aire A_n est donnée par $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $n > 0$, $A_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = F_n(1) - F_n(0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] - \left[0 + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right) = \frac{1}{2}\text{ ; donc } \lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\text{j} = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** On résout l'équation : $z^2+z+1=0$; $\Delta=-3<0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

   b. $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2. $\left|\mathrm{j}\right|^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ donc $|\mathrm{j}|=1$

   $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos\theta&=&-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta&=&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\theta=\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   La forme exponentielle de j est donc : $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3. **a.** $\mathrm{j}^3=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\times3}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times2\pi}=1$

   b. j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$ et donc $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

   P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}=-1+\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\mathrm{PQ}^2=\left|-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right|^2=\left|-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow\mathrm{PQ}=\sqrt{3}$

   $\mathrm{QR}^2=\left|-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|2=\left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2=3\Longrightarrow\mathrm{QR}=\sqrt{3}$

   $\mathrm{RP}^2=\left|1+\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow\mathrm{RP}=\sqrt{3}$

   PQ = QR = RP donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c=0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a+b\mathrm{j}+c\mathrm{j}^2=0$ donc $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c$.
   Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$ donc :
   $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c=-\mathrm{j}b-(-1-\mathrm{j})c=-\mathrm{j}b+c+\mathrm{j}c\iff a-c=\mathrm{j}(c-b)$
2. $a-c=\mathrm{j}(c-b)\Longrightarrow|a-c|=\left|\mathrm{j}(c-b)\right|\iff|a-c|=\left|\mathrm{j}\right|\times|c-b|$
   On a vu précédemment que $\left|\mathrm{j}\right|=1$; de plus $|a-c|=\mathrm{AC}$ et $|c-b|=\mathrm{BC}$.
   On a donc démontré que AC = BC.
3. On sait que $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c$. On sait aussi que $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$ donc $\mathrm{j}=-1-\mathrm{j}^2$.
   On a donc $a=-(-1-\mathrm{j}^2)b-\mathrm{j}^2c=b+\mathrm{j}^2b-\mathrm{j}^2c$ ce qui équivaut à $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$.
4. On sait que $\left|\mathrm{j}\right|=1$ donc $\left|\mathrm{j}^2\right|=\left|\mathrm{j}\right|^2=1$. De plus $|a-b|=\mathrm{AB}$ et $|b-c|=\mathrm{CB}$.
   On a vu dans la question précédente que $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$ ce qui entraîne $|a-b|=\left|\mathrm{j}^2(b-c)\right|$ ou encore $|a-b|=\left|\mathrm{j}^2\right|\times|b-c|$. Cette dernière égalité équivaut à AB = CB.
   Comme AC = BC et AB = CB, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N=1+2+\ldots+n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. $36 = \dfrac{72}{2} = \dfrac{8\times 9}{2} = 1+2+3+4+5+6+7+8$ donc 36 est un nombre triangulaire.
   De plus, $36 = 6^2$.
2. **a.** $1+2+\ldots+n = p^2 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2+n-2p^2 = 0$.
   Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2 = 0$.
   b. $n^2+n-2p^2 = 0 \iff 4n^2+4n-8p^2 = 0 \iff 4n^2+4n+1-8p^2 = 1 \iff (2n+1)^2-8p^2 = 1$
   Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2-8y^2 = 1$, où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

1. Deux couples solution sont, par exemple, $(3\,;\,1)$ et $(1\,;\,0)$.
2. Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ solution de (E).
   Soit d un diviseur commun à x et y.
   Alors d divise x^2, y^2, $8y^2$ et donc d divise x^2-8y^2 donc d divise 1.
   On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$ ce qui veut dire que x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+8y \\ x+3y \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 3x+8y \\ y' &=& x+3y \end{array}\right.$
2. La matrice A a un déterminant égal à 1, donc non nul, donc elle admet une matrice inverse A^{-1}.
   Pour déterminer A^{-1} on peut chercher la matrice carrée $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues $A \times A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; enfin il faut vérifier que $A' \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On peut également déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff A^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x'-8y' \\ -x'+3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   $\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3x'-8y' \\ y &=& -x'+3y' \end{array}\right.$
3. $(x\,;\,y)$ est solution de (E) $\iff x^2-8y^2 = 1$
   $\iff \left(3x'-8y'\right)^2 - 8\left(-x'+3y'\right)^2 = 1$
   $\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8\left(x'^2-6x'y'+9y'^2\right) = 1$
   $\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8x'^2+48x'y'-72y'^2 = 1$
   $\iff x'^2-8y'^2 = 1$
   $\iff (x'\,;\,y')$ est solution de (E)
4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).
   - Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc $x_0^2-8y_0^2 = 9-8 = 1$ donc $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de (E).
     La propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que la propriété est vraie à un rang p ($p \geqslant 0$) c'est-à-dire que $(x_p\,;\,y_p)$ est solution de (E) ; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que $(x_{p+1}\,;\,y_{p+1})$ est solution de (E).
  On a vu dans la question précédente que si $(x;\,y)$ était solution de (E), alors $(x'\,;\,y')$ défini par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).
  Comme $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E), on peut dire que $(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$ est solution de (E) puisque $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout n.

Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

- On cherche n entier naturel tel que : $1+2+3+\ldots+n \geqslant 2015$.
  Ce qui équivaut à $\dfrac{n(n+1)}{2} \geqslant 2015 \iff n^2+n-4030 \geqslant 0$.
  L'équation $x^2+x-4030=0$ a pour solutions $\dfrac{-1-2\sqrt{329}}{2} \approx -63,98$ et $\dfrac{-1+2\sqrt{329}}{2} \approx 62,98$.
  Pour que le nombre triangulaire soit supérieur à 2 015, il faut que $n \geqslant 63$.
- Dans la partie **A** on a vu qu'un nombre triangulaire $1+2+\ldots+n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$.
- Dans la partie **C** on a déterminé une suite de couples $(x_n\,;\,y_n)$ qui étaient tous solutions de l'équation $x^2-8y^2=1$.
- On va donc chercher $n \geqslant 63$ tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$; si $n \geqslant 63$, alors $2n+1 \geqslant 127$.
  Ce qui revient à chercher les couples $(x_n\,;\,y_n)$ solutions de (E) avec $x_n \geqslant 127$.
- En partant de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A, on trouve comme solutions $\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 577 \\ 204 \end{pmatrix}\ldots$
- $577 = 2\times 288+1$ donc un nombre triangulaire supérieur à 2 015 est $1+2+3+\ldots+288 = \dfrac{288\times 289}{2} = 41\,616$.
- On peut vérifier que $41\,616 = 204^2$ (résultat en conformité avec la question **A. 2. a.**).

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Antilles-Guyane 22 juin 2015

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour toutes les courbes, on a $g_a(1) = a$. Donc on a de bas en haut les courbes $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.
2. Les courbes $\Gamma_{0,05}$ et $\Gamma_{0,1}$ semblent sécantes à $\mathscr{C}$ en deux points ;
   La courbe $\Gamma_{0,19}$ semble être tangente à $\mathscr{C}$;
   La courbe $\Gamma_{0,4}$ et $\mathscr{C}$ semblent ne pas être sécantes.
   Il semble donc que :
   — si $0 < a < 0,19$, Γ_a et $\mathscr{C}$ ont deux points communs ;
   — si $a = 0,19$, $\Gamma_{0,19}$ et $\mathscr{C}$ ont un point commun ;
   — si $a > 0,19$, Γ_a et $\mathscr{C}$ n'ont pas de point commun.

Partie B

1. Si $m(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \cap \Gamma_a$, alors $\ln x = ax^2 \iff \ln x - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0$.
   Le nombre de points communs à $\mathscr{C}$ et Γ_a est donc égal au nombre de solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.
2. **a.**

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

   On a en fait : $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{x}$.
   Comme $x > 0$ et $a > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est celui de $1 - 2ax^2$.
   Or $1 - 2ax^2 = 0 \iff 1 = 2ax^2 \iff \dfrac{1}{2a} = x^2 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.
   D'où le tableau de variation de h_a.

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   Comme $h_a(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2ax\right)$, on a donc :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - 2ax = -\infty$ et par produit de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 2ax\right) = -\infty$.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

   a. $h_{0,1}(x) = 0 \iff \ln x - 0,1x^2 = 0$.
   Soit i la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $i(x) = \ln x - 0,1x^2$; cette fonction est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $i'(x) = \dfrac{1}{x} - 0,2x$.
   or $i'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x^2 \iff 5 = x^2 \iff x = \sqrt{5}$.

On a de même $i'(x) > 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x^2 \iff 5 > x^2 \iff x < \sqrt{5}$.

Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\sqrt{5}\right[$, la fonction i est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\ln\sqrt{5} - 0,1\times\left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\ln 5 - 0,5 \approx 0,3 > 0$: la fonction i s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[$.

b. D'après la question précédente la courbe Γ_0, et $\mathscr{C}$ ont deux points communs : l'un sur $\left]0\,;\,\sqrt{5}\right[$ et l'autre sur $\left]\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[$.

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

a. Le tableau de variations montre que le maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ est égal à $\dfrac{-1-\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \dfrac{-1+\ln\mathrm{e}}{2} = 0$.

b. Le maximum étant nul, on en déduit que $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}(x) \leqslant 0 \iff \ln x \leqslant \frac{1}{2\mathrm{e}}x^2$; autrement dit $\mathscr{C}$ est sous $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, sauf pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2\mathrm{e}}}} = \sqrt{\mathrm{e}}$ où elles ont un seul point commun.

5. On a vu que $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le maximum de la fonction h_a est inférieur à zéro, soit :

$\dfrac{-1-\ln(2a)}{2} < 0 \iff -1-\ln(2a) < 0 \iff \ln 2a > -1 \iff \mathrm{e}^{\ln 2a} > \mathrm{e}^{-1} \iff$

$2a > \mathrm{e}^{-1} \iff a > \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 0,183\,94 \approx 0,19$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

1. D'après l'indication :

$\displaystyle\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left[-\left(0+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\times 0}\right] =$

$\dfrac{1}{\lambda} - \left(t+\dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda}\left[1 - x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]$

2. De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit avec $\lambda > 0$,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ et aussi

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\lambda\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = \int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a. Voir la surface hachurée sur l'annexe 2 à la fin.

b. On lit comme ordonnée à l'origine $\lambda = 0,5$.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. $E(X) = 2$ signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.

b. On a vu que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$.

c. On a :
$P(X \leqslant 2) = \displaystyle\int_0^2 \lambda \mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^2 = -\mathrm{e}^{-0,5\times 2} - \left(\mathrm{e}^{-0,5\times 0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \approx 0,632 \approx 0,63$ au centième près. Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance $E(X)$.

d. Il faut trouver :
$P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 3) = P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0,368$.

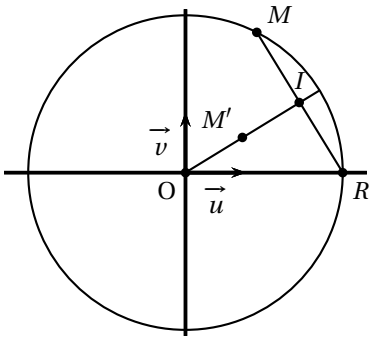
Partie C

1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.
2. Ici la probabilité est égale à :
$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279$.

EXERCICE 3 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A



1. Puisque $\mathrm{O}M = \mathrm{O}R$, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$.
Comme R a un argument égal à 0 à 2π près on a $z_R = |z|$.
2. $$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$
L'affixe de $\dfrac{z+|z|}{2}$ est égale à la demi-somme des affixes de celles de M et de R. Le point ayant cette affixe est donc le milieu I du segment $[MR]$.
Finalement le point M' est le milieu de $[\mathrm{O}I]$.

Partie B

1. Si z_0 est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où
$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = \dfrac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.
2. Si z_0 est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où
$z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} = \dfrac{z_0 + z_0}{4} = \dfrac{z_0}{2}$, puis $z_2 = \dfrac{z_1 + |z_1|}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2} + \frac{z_0}{2}}{4} = \dfrac{z_0}{4}$.
Montrons par récurrence que $z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.
Initialisation : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $z_p = \dfrac{z_0}{2^p}$; alors

$z_{p+1} = \dfrac{z_p + \left|z_p\right|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^p} + \frac{z_0}{2^p}}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^{p-1}}}{2^2} = \frac{z_0}{2^{p+1}}$: la relation est vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré que pour tout naturel $u_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.

La suite (z_n) est donc une suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $\frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0.

3. **a.** D'après la première construction, le module de z'_M est inférieur à celui de z_M et son argument est égal à la moitié. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0.

b. On sait (inégalité triangulaire) que pour tous complexes z_1 et z_2, que
$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
En appliquant cette inégalité à $\frac{z_n}{4}$ et à $\frac{|z_n|}{4}$, on obtient :
$|z_{n+1}| \leqslant \left|\frac{z_n}{4}\right| + \left|\frac{|z_n|}{4}\right|$ ou encore
$|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{4}$ ou
$|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n|}{2}$.

On montre de la même façon que précédemment par récurrence que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

La suite $\left(\dfrac{|z_0|}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes la suite $(|z_n|)$ converge elle aussi vers 0.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

valeur de k		1	2
valeur de u	5	1	$-0,5$

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Afficher u
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque $u_4 > u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.

Hérédité On suppose qu'il existe un naturel p tel que $u_{p+1} > u_p$.

D'où $0,5u_{p+1} > 0,5u_p$; D'autre part : $p+1 > p \Rightarrow 0,5(p+1) > 0,5p$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) > 0,5u_p + 0,5p$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) - 1,5 > 0,5u_p + 0,5p - 1,5$ soit $u_{p+2} > u_{p+1}$: la relation est vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel n, on a :

$v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 = 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$: la suite (v_n) rdy donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est :

$v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

On a donc pour tout naturel n, $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \dfrac{1}{2^n}$.

5. On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de faÃ§on indépendante

Partie A

1.

valeur de a	26	9	8
valeur de b	9	8	1
valeur de c	8	1	0
Affichage			1

2.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b

Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	  Affecter à a le nombre b
	  Affecter à b la valeur de c
	  Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que

Sortie :	Si $b = 1$
	  Afficher « les nombres entrés sont premiers entre eux »
	Sinon
	  Afficher « les nombres entrés ne sont pas premiers entre eux »
	Fin de Si

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a. Dans le tableau V correspond à 21, or $9 \times 21 + 2 = 189 + 2 = 191$ et $191 = 26 \times 7 + 9$; donc $x' \equiv 9 \quad [26]$.

Dans le tableau 9 correspond à la lettre J.

b. 9 et 26 étant premiers entre eux, le théorème de Bezout permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$.

Le couple $(3\ ;\ -1)$ est un couple simple solution de cette équation.

c. On a $x' \equiv 9x + 2 \quad [26] \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z},\ x' = 26k + 9x + 2 \iff$
$3x' = 26k' + 27x + 6 \iff 3x' = 26k' + 26x + x + 6 \iff 3x' = 26r'' + x + 6 \iff x = 26(-r'') + 3x' - 6 \iff x = 26(-r'') + 3x' + 20$, soit $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$

d. R correspond à $x' = 17$, donc $3x' + 20 = 51 + 20 = 71$ et

$71 = 26 \times 2 + 19$, soit $71 \equiv 19 \quad [26]$.

On a donc $x = 19$ qui correspond à la lettre T.

2. J correspond à $x = 9$ et D correspond à $x' = 3$. de plus $q = 2$; on a donc :

$3 = 9p + 2 \quad [26] \iff 9p \equiv 1 \quad [26]$ ou encore $27p \equiv 3 \quad [26]$, mais on sait que $27 \equiv 1 \quad [26]$; il en résulte que $p \equiv 3 \quad [26]$ et comme p est compris entre 0 et 25, on a donc $p = 3$.

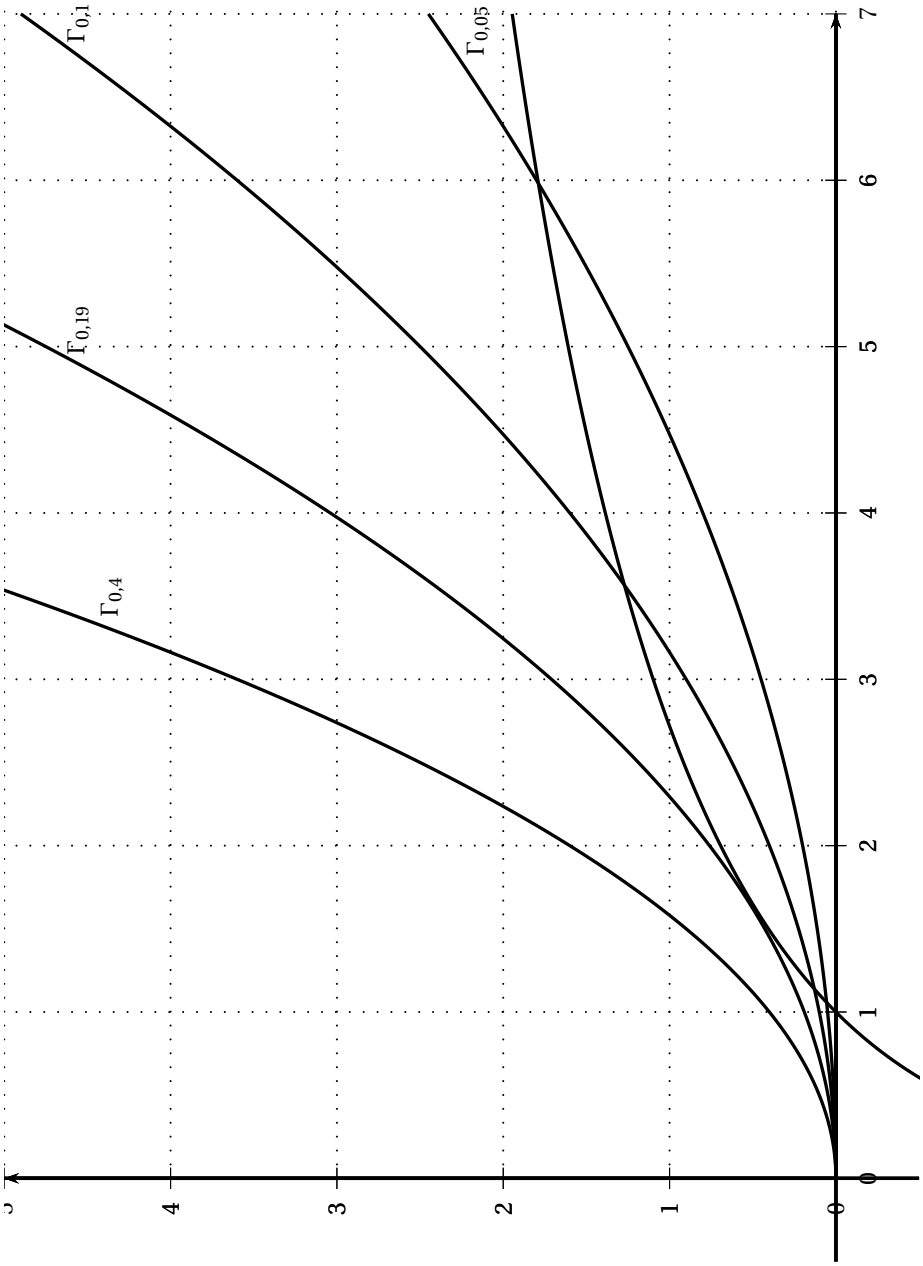
3. B correspond à $x = 1$, d'où $x' = 13x + 2 \equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.

D correspond à $x = 3$, d'où $x' = 13x + 2 \equiv 41 \quad [26]$ et $41 \equiv 15 \quad [26]$ et 15 correspond à la lettre P.

Conclusion : deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

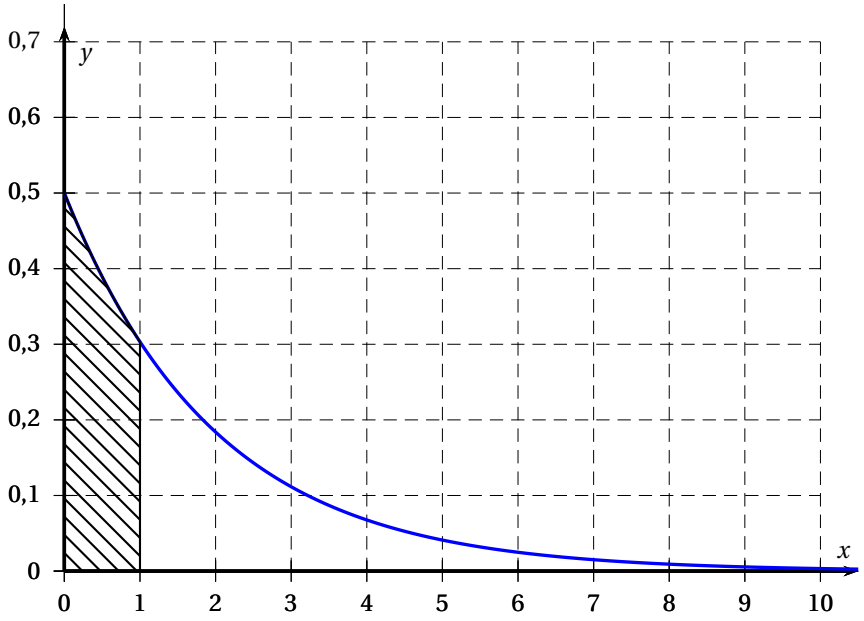
Ã€ RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1



à RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2



Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Métropole 22 juin 2015

EXERCICE 1 — 6 POINTS

Partie 1

1. **a.** Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
   Par définition, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_c^d$
   $= -\mathrm{e}^{-\lambda d} - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda c}\right) = \boxed{\mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}}$.

   b. $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95 \iff \mathrm{e}^{-\lambda\times 0} - \mathrm{e}^{-\lambda \times 20} = 0,95 \iff 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,95 \iff \mathrm{e}^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.

   c. On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

   Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

   d. $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \mathrm{e}^{-10\lambda} - \mathrm{e}^{-20\lambda} = \mathrm{e}^{-1,5} - \mathrm{e}^{-3} \approx \boxed{0,173}$.

   e. $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = \mathrm{e}^{-18\lambda} = \mathrm{e}^{-27} \approx \boxed{0,067}$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

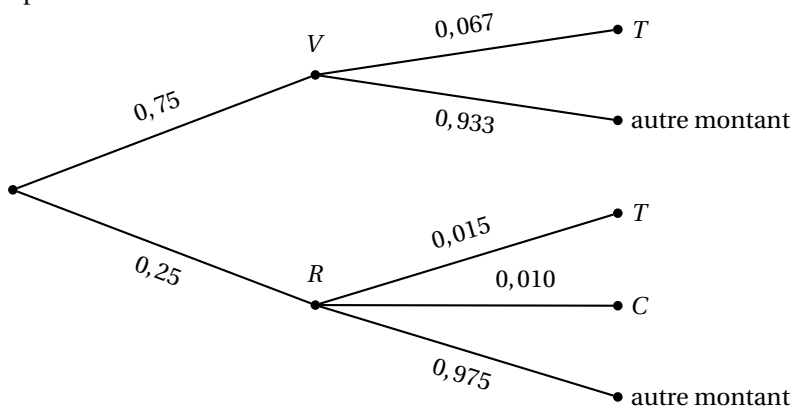
   a. $P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,015}$.

   b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,010}$.

Partie 2

1. Notons :
   - R l'évènement « le bon d'achat est rouge ».
   - V l'évènement « le bon d'achat est vert ».
   - T : l'évènement « avoir un un bon d'achat de trente € ».
   - C : l'évènement « avoir un un bon d'achat de cent € ».
   - A : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'une autre valeur ».
   - S : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30 € ».

   ,L'arbre correspondant est alors :



   On a : $P_R(S) = P_R(T \cup C) = p_R(T) + P_R(C) = 0,015 + 0,010 = \boxed{0,025}$.

2. $P(S) = P(R \cap S) + P(V \cap S) = 0,75 \times 0,067 + 0,25 \times 0,025 = 0,0566 \approx \boxed{0,057}$.
   Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. La probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 €est $p = 0,057$.

La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100} = 0,03$.

La taille de léchantillon est $n = 200$.

On a $n = 200 \geqslant 30$; $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.

On peut donc utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$I_{200} = \left[p - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx \boxed{[0,024\ ;\ 0,090]}$.

$f = 0,03 \in I$. Les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95 %.

EXERCICE 2 — 3 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. **a.** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.

c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

On doit avoir : $\begin{cases} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$ donc $\boxed{E(11\ ;\ -1\ ;\ 5)}$.

d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\begin{cases} x &= 11 \\ y &= 0,8t' \\ z &= 1 + 0,6t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$. On résout le système $\begin{cases} t &= 11 \\ -1 &= 0,8t' \\ 5z &= 1 + 0,6t' \end{cases}$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1 + 0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. **a.** $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11-t\\0,8t+1\\0,6t-4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t = \sqrt{(11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2}$

$= \sqrt{121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 - 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16} =$

$\boxed{\sqrt{2t^2 - 25,2t + 138}}$.

b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2 - 25,2t + 138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \dfrac{25,2}{4} = 6,3$.

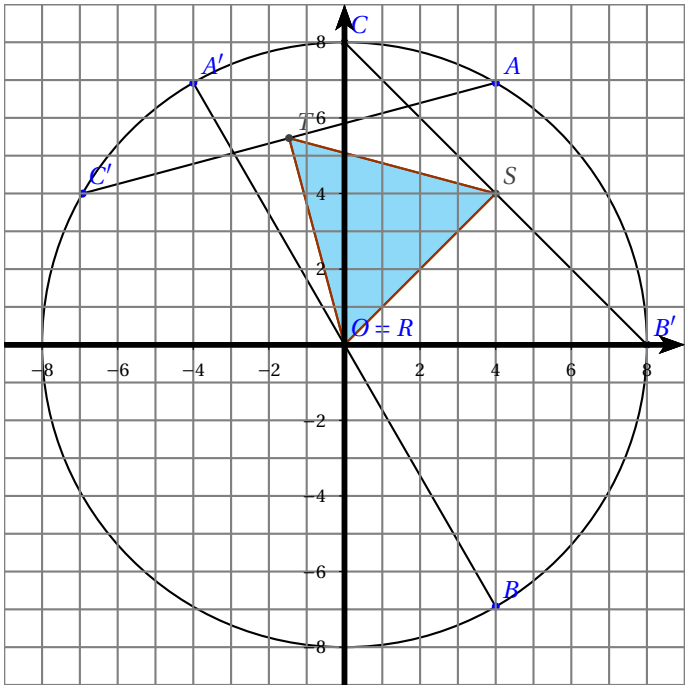
La distance est **minimale** pour $\boxed{t = 6,3 \text{ s}}$

EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$.
   $\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
   L'équation a deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1 = \dfrac{8 + \mathrm{i}\sqrt{3 \times 64}}{2} = \boxed{4 + 4\sqrt{3}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}}$.
   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$. (figure à la fin de l'exercice)
   a. $|a| = |4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}| = 4|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}| = 4 \times 2 = \boxed{8}$.
   On en déduit $a = 8\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{3}$.
   b. On a trouvé $a = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   c. $|a| = 8$; $|b| = \left|\overline{a}\right| = |a| = 8$ et $|c| = |8\mathrm{i}| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.
   d. Voir figure en fin d'exercice.
3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \boxed{8}$.
   b. $|a'| = \left|a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = |a| \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = |a| = \boxed{8}$ car $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ pour tout θ réel.
   $\arg(a') = \arg\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$
   Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.
4. **a.** On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   On a : $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} + 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}$.
   $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8\mathrm{i}}{2} = 4 + 4\mathrm{i}$.
   On a admis que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.
   - $RS = |s - r| = |4 + 4\mathrm{i}| = 4|1 + \mathrm{i}| = \boxed{4\sqrt{2}}$.
   - $ST = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-2 + 2\sqrt{3}\right)| = 2|-1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(-1 + \sqrt{3}\right)|$
     $= 2\sqrt{\left(-1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(-1 + \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3\right)} = 2\sqrt{8}$
     $= \boxed{4\sqrt{2}}$.
   - $RT = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(-2 + 2\sqrt{3})|$
     $= 2|-1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})| = 2\sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8}$
     $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

   $RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



EXERCICE 3 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

   a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3\,;4)$ est solution de (E).

   b. $(x\,;y)$ solution de (E) $\iff 7x - 5y = 1 \iff 7x - 21 = 5y - 20 \iff 7(x-3) = 5(x-4)$

   c.
   - Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x-3) = 5(y-4)$.

     $7(x-3) = 5(y-4)$ entraîne que 7 divise $5(y-4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

     Comme $7(x-3) = 5(y-4)$ et $y - 4 = 7k$, cela implique que $7(x-3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.

     Donc si $(x\,;y)$ est solution de (E), alors $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$
   - Réciproquement, si le couple d'entiers $(x\,;y)$ est tel que

     $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k+3) - 5(7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$

     donc $(x\,;y)$ est solution de (E).
   - Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs tels que

     $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.

   D'après la question **1**, on peut dire que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.

Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.

Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.

Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\dfrac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\dfrac{4}{25} = 016$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\dfrac{18}{25} = 0,72$.

On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n+1$ le pion soit en A.

S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.

S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.

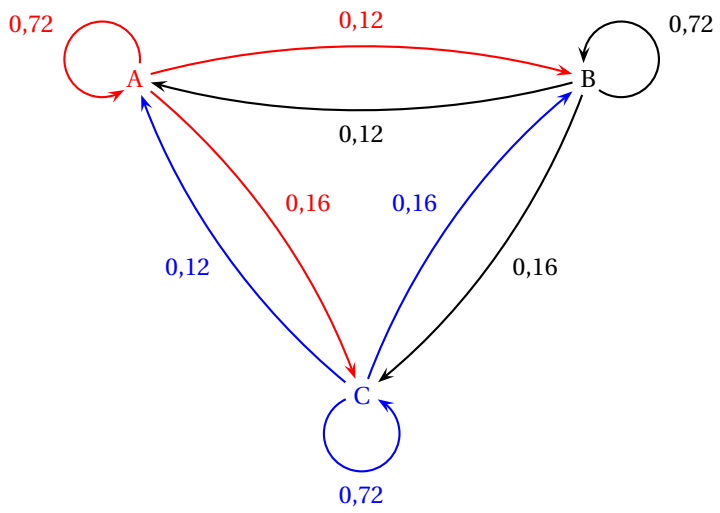
On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} & = & 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} & = & 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{array}\right.$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$$

soit $X_{n+1} = X_n T$ où $T = \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$

La situation décrite dans le texte peut être modélisée par le graphe ci-dessous :



La matrice T est alors la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre A, B, C.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$

a. On sait que $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) la propriété $\mathscr{P}_n$: $T^n = PD^nP^{-1}$.

- On sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- On suppose la propriété vraie à un rang p ($p \geqslant 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p+1$.
  $T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0T^n$.

a. $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = X_0T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$.

$b_n == \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,56^n = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$.

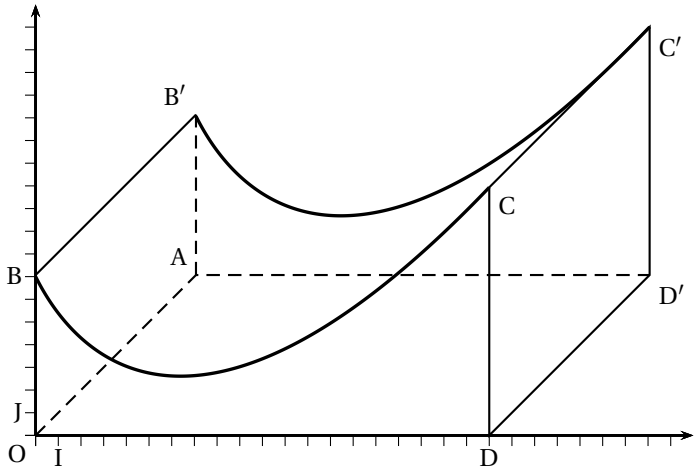
$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$.

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.

EXERCICE 4 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. $f = u\ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.
   f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $f' = u'\ln(u) + u \times \dfrac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -3$ d'où $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - 3 =$ $\ln(x+1) + 1 - 3$ donc $\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}$.
2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1 - \mathrm{e}^2 \iff x = \mathrm{e}^2 - 1$.
   $f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > \mathrm{e}^2$ (croissance de la fonction exp) d'où $x > \mathrm{e}^2$-1.
   On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\mathrm{e}^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	$f(\mathrm{e}^2-1) \approx 2,6$	↗	$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = 1\ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

   a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par
   $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
   g est donc une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$.
   Une primitive de $x \mapsto 3x - 7$ est $x \mapsto \dfrac{3x^2}{2} + 7x$.

Une primitive de f est donc définie par :

$F(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{2} + 7x = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3x^2}{2} + 7x =$

$\boxed{\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{13}{2}x}$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P$_1$: La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie** ;

P$_2$: L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut $\mathscr{A}_1 = \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = F(20) - F(0)$.

$F(21) = \dfrac{21^2\ln 21}{2} - 700 + 130 = \dfrac{441\ln 21}{2} - 570$.

$F(0) = 0$.

On en déduit $\boxed{\mathscr{A}_1 = \dfrac{441\ln 21}{2} - 570 \approx 101,3}$.

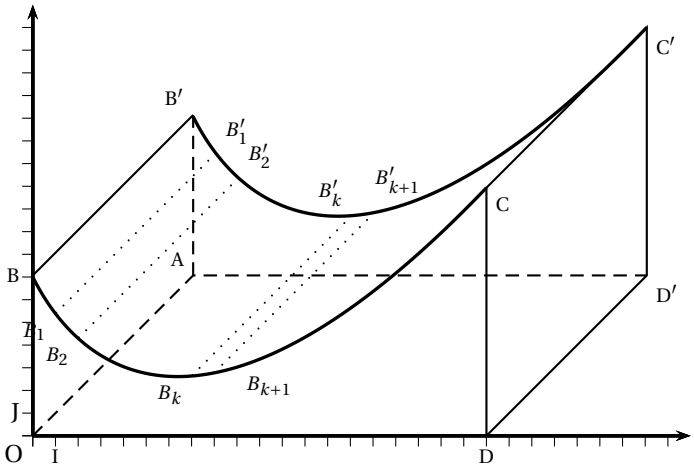
L'aire latérale gauche vaut $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(OAB'B) = \boxed{10f(0) = 70}$.

L'aire latérale droite vaut $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}(DD'C'C) = \boxed{10f(20) = \approx 109,3}$.

L'aire à peindre en rouge est donc $\mathscr{A} = 2\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \approx \boxed{381,9\ \mathrm{m}^2}$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\dfrac{381,9}{5} \approx \boxed{77\ \mathrm{l}}$

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \mathrm{B}$.



a. $B_kB_{k+1} = \sqrt{1^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \boxed{\sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}}$.

b. La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.
Pour K allant de 0 à 19
S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + \left(f(k+1) - k(k)\right)^2}$
Afficher S

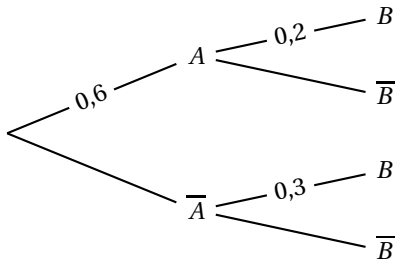
Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S – Métropole - La Réunion
9 septembre 2015

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'événement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

$P(B) = 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times 0,3 = 0,24$

Question 2

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

Pour une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, on sait que $P(X \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
Donc $P(T \geqslant 60) = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{30} \times 60} = 0,25$

Question 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.
Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

On peut faire le calcul à la machine ou utiliser le fait que $P(X \geqslant 135) = P(X \geqslant \mu + \sigma)$. Et comme on sait que $P(\mu - \sigma) \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$, on déduit aisément $P(X \geqslant \mu + \sigma)$.

Question 4

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.
Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile est $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,402 ; 0,598]$

Des quatre intervalles proposés, c'est le seul centré sur 0,5.

Question 5

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.
Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 $\boxed{\textbf{c. } 1\,600}$ **d.** 3 200

L'intervalle de confiance généralement utilisé est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ d'amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0,05 \iff \dfrac{2}{0,05} < \sqrt{n} \iff 1\,600 < n$

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 7 points

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$
   On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0;+\infty[$ donc sur $[n;n+1]$; on peut en déduire que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ et donc que $I_{n+1} - I_n > 0$ pour tout n.
   La suite (I_n) est donc croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   a. Sur $[0\,;\,+\infty[$, on sait que $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$; de plus, pour tout x, $\mathrm{e}^x - x > 0$. donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.
   On multiplie cette inégalité par $x \geqslant 0$ donc : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$
   D'après la positivité de l'intégration : $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \frac{2x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
   ce qui équivaut à $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $H(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$
   La fonction H est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et
   $H'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$
   c. On déduit de la question précédente que la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x}$.
   Donc $\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[2(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n = 2(-n-1)\,\mathrm{e}^{-n} - \left[2(-1)\,\mathrm{e}^0\right] = 2 - 2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$
   Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n} > 0$ donc $2 - 2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant 2$
   $$\left.\begin{array}{l} I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow I_n \leqslant 2$$
3. La suite (I_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (i_n) est convergente.

Partie B

1. On fait fonctionner l'algorithme pour $K = 4$ donc pour $h = 0,25$:

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2. Pour $K = 8$, l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique du bas de la page 73.
3. Quand K devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (voir page 73, le graphique du haut).

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi la spécialité 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $A(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2-0\,;\,2-1\,;\,-1-(-1) = (-2\,;\,1\,;\,0)$.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-0\,;\,y-1\,;\,z-(-1) = (x\,;\,y-1\,;\,z+1)$.

$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& -2k \\ y-1 &=& k \\ z+1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{R}$

2. **a.** La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,1\,;\,0)$.

La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que

$\left\{\begin{array}{l c l} -2+t &=& -2k \\ 1+t &=& 1+k \\ -1-t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -2 &=& -2k \\ 0 &=& k \\ t &=& 0 \end{array}\right.$ Il n'y a donc pas de solution.

Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.

$x_M + y_M - z_M - 3u = -2+u+1+u-(-1-u)-3u = -2+u+1+u+1+u-3u = 0$ donc $M \in \mathscr{P}$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$; donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

4. Pour déterminer si le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants, on résout le système

$\left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ x+y-z-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ -2k+1+k+1-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2(2-3u) \\ y=1+2-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4+6u \\ y=3-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right.$

Donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants au point $N(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.

5. **a.** La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale en M au plan $\mathscr{P}$; donc la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathscr{P}$ passant par M, donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans $\mathscr{P}$ puisque $N \in \mathscr{P}$.

b. La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ de coordonnées

$(-4+6u-(-2+u)\,;\,3-3u-(1+u),\,;\,-1-(-1-u)) = (-2+5u\,;\,2-4u\,;\,u)$.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2\,;\,1\,;\,0)$.

Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1+u\times 0 = 4-10u+2-4u = 6-14u$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6 - 14u = 0 \iff \dfrac{3}{7} = u$

De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M ; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u = \dfrac{3}{7}$.

6. **a.** $MN^2 = \| MN \|^2 = (-2+5u)^2 + (2-4u)^2 + u^2 = 4-20u+25u^2+4-16u+16u^2+u^2 = 42u^2-36u+8$

b. MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme au^2+bu+c, et le coefficient de u^2 est $a = 42 > 0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-36}{2\times 42} = \dfrac{3}{7}$.

La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $u = \dfrac{3}{7}$.

Exercice 3 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. $15 = 3 \times 5$ et $26 = 2 \times 13$; les deux nombres 15 et 26 sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, on peut déduire qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $15u - 26v = 1$.

On cherche un tel couple en utilisant l'algorithme d'Euclide et en écrivant les restes successifs comme combinaisons linéaires de 15 et de 26 :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
26 & = & 1 \times 15 + 11 & -1 \times 15 + 1 \times 26 & = & 11 \\
15 & = & 1 \times 11 + 4 & 15 - 1 \times 11 & = & 4 \\
 & & & 15 - (-1 \times 15 + 1 \times 26) & = & 4 \\
 & & & 2 \times 15 - 1 \times 26 & = & 4 \\
11 & = & 2 \times 4 + 3 & 11 - 2 \times 4 & = & 3 \\
 & & & (-1 \times 15 + 1 \times 26) - 2(2 \times 15 - 1 \times 26) & = & 3 \\
 & & & -5 \times 15 + 3 \times 26 & = & 3 \\
4 & = & 1 \times 3 + 1 & 4 - 1 \times 3 & = & 1 \\
 & & & (2 \times 15 - 1 \times 26) - 1(-5 \times 15 + 3 \times 26) & = & 1 \\
 & & & 7 \times 15 - 4 \times 26 & = & 1
\end{array}$$

Donc le couple $(7\,;\,4)$ est solution de l'équation $15u - 26v = 1$.

2. $15 \times 7 - 26 \times 4 = 1$ donc $15 \times (7m) - 26 \times (4m) = m$

Le couple $(7m\,;\,4m)$ est une solution particulière de l'équation (E) : $15x - 26k = m$.

3.
- On suppose que $15\,(x - x_0) - 26\,(k - k_0) = 0$ avec $x_0 = 7m$ et $k_0 = 4m$, donc
  $15\,(x - 7m) - 26\,(k - 4m) = 0$
  Alors $15x - 15 \times 7m - 26k + 26 \times 4m = 0$, ce qui implique $15x - 26k = 15 \times 7m - 26 \times 4m$ ou encore $15x - 26k = m$
  Donc le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E).
- On suppose que $(x\,;\,k)$ est solution de (E) : $15x - 26k = m$
  On sait que $(x_0\,;\,k_0)$ est une solution de (E) : $15x_0 - 26k_0 = m$
  On soustrait membre à membre : $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$
  Donc $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$

On peut dire que $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15\,(x - x_0) - 26\,(k - k_0) = 0$.

4.
- Si le couple $(x\,;\,k)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors :
  $15x - 26k = 15(26q + 7m) - 26(15q + 4m) = 15 \times 26q + 105m - 26 \times 15q - 104m = m$.
  Donc le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E).
- Si le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E), on sait que $15\,(x - 7m) - 26\,(k - 4m) = 0 \iff 15\,(x - 7m) = 26\,(k - 4m)$
  Donc 15 divise $26\,(k - 4m)$. Or 15 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gausse, 15 divise $k - 4m$; donc il existe un entier relatif q tel que $k - 4m = 15q$ et donc $k = 15q + 4m$.
  $\left.\begin{array}{l} 15\,(x - 7m) = 26\,(k - 4m) \\ k - 4m = 15q \end{array}\right\} \Longrightarrow 15\,(x - 7m) = 26 \times 15q \iff x - 7m = 26q$ donc $x = 26q + 7m$
  Donc, si $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E), on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right.$

Les solutions de l'équation (E) sont donc exactement les couples $(x\,;\,k)$ d'entiers relatifs tels que :
$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$

Partie B

1. On code le mot **MATHS** :

lettre	x	$15x+7$	reste	lettre
M	12	187	5	F
A	0	7	7	H
T	19	292	6	G
H	7	112	8	I
S	18	277	17	R

Donc le mot **MATHS** se code en **FHGIR**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.

a. Si y est le reste de la division de $15x+7$ par 26, cela signifie que $(15x+7)-y$ est un multiple de 26, donc qu'il existe un entier relatif k tel que $(15x+7)-y=26k$, ce qui équivaut à

$$15x-26k=y-7$$

b. $15x-26k=y-7 \iff 7\times 15x-7\times 26k=7\times y-7\times 7 \iff 105x-7\times 26k=7y-49$

$$\left.\begin{array}{r} 105=4\times 26+1 \Rightarrow 105\equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 105x\equiv x \pmod{26} \\ 7\times 26\equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow 7\times 26k\equiv 0 \pmod{26} \\ -49=-2\times 26+3\equiv 3 \pmod{26} \end{array}\right\} \Longrightarrow x\equiv 7y+3 \pmod{26}$$

c. Voici donc un système de décodage d'une lettre :

— à cette lettre, on associe l'entier y correspondant,
— on associe ensuite à y l'entier x qui est le reste de la division euclidienne de $7y+3$ par le nombre 26,
— on associe à x la lettre correspondante.

3. On décode les trois lettres W, H et L :

lettre	y	$7y+3$	reste	lettre
W	22	157	1	B
H	7	52	0	A
L	11	80	2	C

Donc le mot **WHL** se décode en **BAC**.

4. À chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre une seule lettre de l'alphabet par le système de codage décrit dans le texte, celui qui fait passer de la lettre correspondant au nombre entier x à la lettre correspondant au nombre entier y.

Réciproquement, chaque lettre de l'alphabet est l'image d'une unique lettre de l'alphabet que l'on obtient par le système de décodage expliqué à la question **2.c.**

Le système de codage réalise donc une bijection sur l'ensemble des lettres de l'alphabet.

Donc deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

Exercice 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}(1+\ln x)$

1. Comme F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F donc les variations de F sont données par le signe de f : F est croissante si et seulement f est positive

   C'est donc dans la situation 2 que la courbe C_F est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f.

2. Dans la situation 2, on appelle :

   — K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées. Ce point K a pour abscisse la solution de l'équation $f(x) = 0$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{x}(1+\ln x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$; donc $K\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$.

   — L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

   a. L'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses a une valeur approchée de 0,5 (aire du rectangle coloré en gris sur le graphique).

   b. Les primitives d'une fonction étant définies à une constante près, on ne peut pas déterminer l'expression de F, primitive de f, et on ne peut donc pas déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point L.

   On ne peut donc pas calculer la valeur exacte de l'aire du domaine défini précédemment.

   Il serait intéressant de savoir ce que les consignes officielles de correction proposaient comme réponse à cette question !

   b. Solution alternative

   Le graphique proposé dans le texte suggère que l'abscisse de L est égale à 1 ; en faisant cette hypothèse, on peut calculer la valeur exacte de l'aire définie plus haut.

   La fonction f est positive sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,1\right]$, donc l'aire du domaine hachuré est $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Pour avoir la valeur exacte de l'aire, il faut déterminer une expression d'une primitive de f.

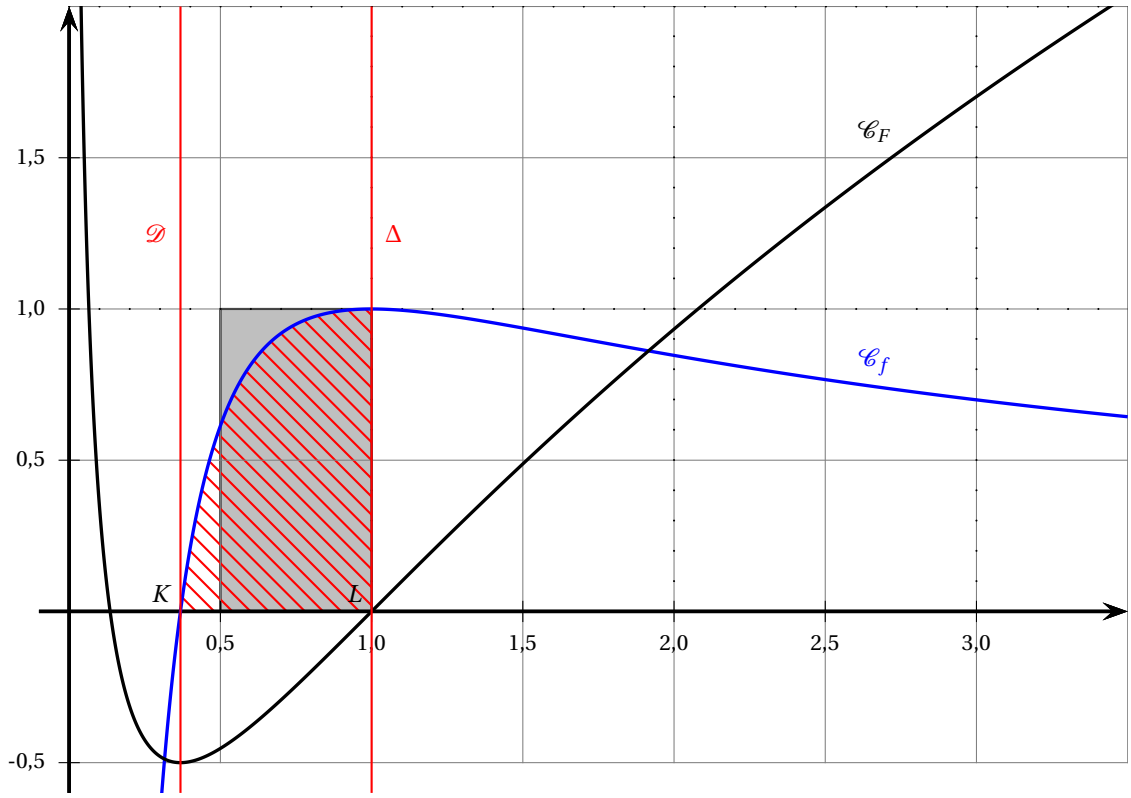
   On écrit $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \times \ln x$

   - La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive sur $]0\,;\infty[$ la fonction $x \mapsto \ln x$.
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'u$, où $u(x) = \ln x$, donc a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$ soit la fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
   - Donc la fonction f a pour primitive $F\,:\,x \mapsto \ln x + \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

   $$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} = \left(\ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\ln \mathrm{e}^{-1} + \frac{(\ln \mathrm{e}^{-1})^2}{2}\right)$$

   Or $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e}^{-1} = -1$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

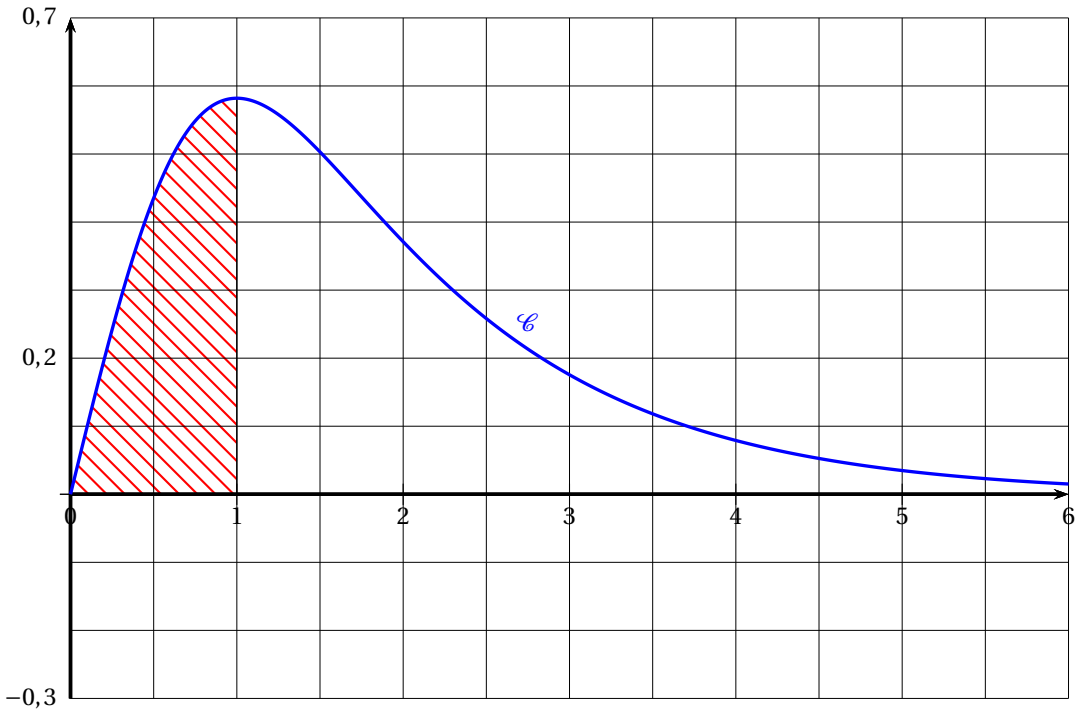
   L'aire du domaine est donc de 0,5 unité d'aire.


1,5
1,0
0,5
-0,5
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
$\mathscr{D}$
Δ
$\mathscr{C}_F$
$\mathscr{C}_f$
K
L

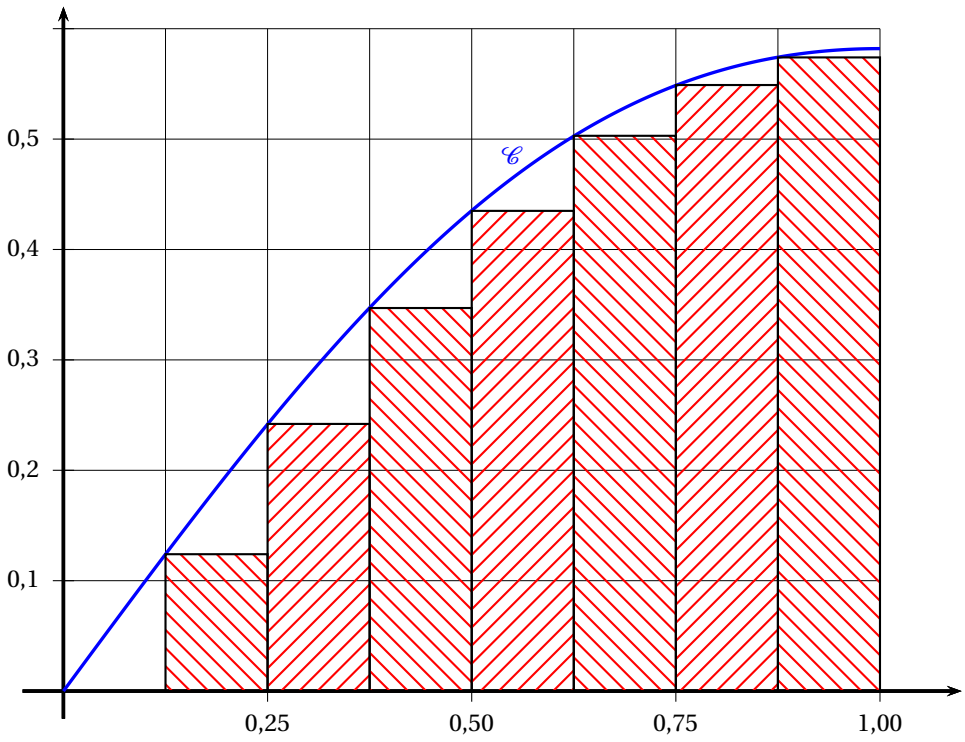
ANNEXE Exercice 2

À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$



Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S (spécialité) – Polynésie
9 septembre 2015

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **7 points**

Partie A

1. Soit u le nombre complexe $1-\mathrm{i}$.

   $|u| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; donc $u = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$

   On cherche le réel α tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos(\alpha) &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\alpha) &=& -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

   L'écriture complexe du nombre $u = 1-\mathrm{i}$ est donc $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$.

2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ donc

   $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i}) = (\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))(1-\mathrm{i}) = \cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta) - \mathrm{i}^2\sin(\theta)$

   $= (\cos(\theta)+\sin(\theta)) + \mathrm{i}(\sin(\theta)-\cos(\theta))$ (forme algébrique)

   $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ (écriture exponentielle)

3. Le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$ s'écrit d'une part $(\cos(\theta)+\sin(\theta)) + \mathrm{i}(\sin(\theta)-\cos(\theta))$ et d'autre part $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

   En identifiant les parties réelles, on obtient : $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   C'est un résultat que l'on peut retrouver directement en développant $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ *au moyen de la formule* $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On définit la fonction h sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. D'après les graphiques :
   - **a.** On peut conjecturer que les limites des fonctions f et g en $+\infty$ sont égales à 0.
   - **b.** La courbe $\mathscr{C}_f$ semble située en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.
   - **c.** L'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semble maximal pour $x = 2$.

2. $g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = (1-\cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}$

   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\cos(x) \leqslant 1$ donc $(1-\cos(x)) \geqslant 0$; donc, pour tout x, $g(x) - f(x) \geqslant 0$ et donc la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3.
   - On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$; donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
   - Pour tout x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant +1$ et comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

     $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

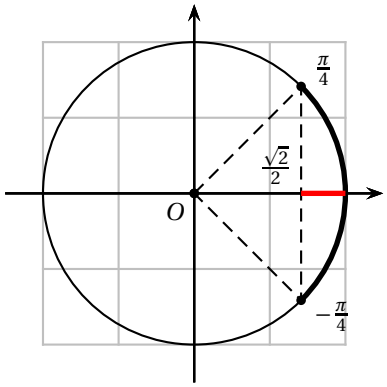
     $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$ donc la fonction h est dérivable sur $[0\,;+\infty[$:
$h'(x) = g'(x) - f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \mathrm{e}^{-x}(-\sin(x))) = \mathrm{e}^{-x}(-1+\cos(x)+\sin(x))$
On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ, $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, donc
$\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$.
On peut donc en déduire que $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

b.

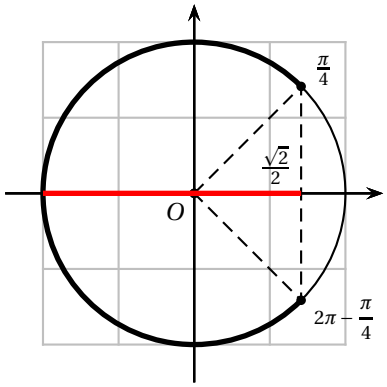
- On se place dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$$
$$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$$



- On se place dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$$
$$\iff \frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$$



c. $h(x) = g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-\cos(x))$
$h(0) = \mathrm{e}^{0}(1-\cos(0)) = 1(1-1) = 0$
$h(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-\cos(2\pi)) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-1) = 0$
$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}(1-0) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,21$
On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		+		+	
$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$		+	0	−	
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	0

5. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction H définie par $H(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$ est une primitive de la fonction h. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.

On a démontré dans la question **2.** que, pour tout x, $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc on peut en déduire que $h(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x$

On sait que la fonction h est une primitive de la fonction h, donc :

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = H(2\pi) - H(0) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+\cos(2\pi)-\sin(2\pi)] - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}[-2+\cos(0)-\sin(0)] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi}[-2+1] - \frac{1}{2}[-2+1]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi} \text{ unité d'aire}$$

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

La probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1} est $P(T \geqslant 60)$.

À la calculatrice, on trouve : $P(T \geqslant 60) \approx 0,006$.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

D'après le texte, $\mu' = 50$; et il faut chercher σ' pour que $P(T' \leqslant 43) = 0,1$.

D'après le cours, on sait que si T' suit la loi normale de paramètres $\mu' = 50$ et σ', alors la variable aléatoire $Z' = \dfrac{T'-50}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et d'écart type 1).

$T' \leqslant 43 \iff T' - 50 \leqslant -7 \iff \dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}$ donc

$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \iff P\left(\dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1 \iff P\left(Z' \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1$ sachant que la variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, pour $P(Z' \leqslant \beta) = 0,1$, on trouve $\beta \approx -1,2816$; on a donc : $-1,2816 = \dfrac{-7}{\sigma'}$ ce qui donne $\sigma' \approx 5,46$.

La variable aléatoire T' suit donc la loi normale de moyenne $\mu' = 50$ et d'écart type $\sigma' \approx 5,46$.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

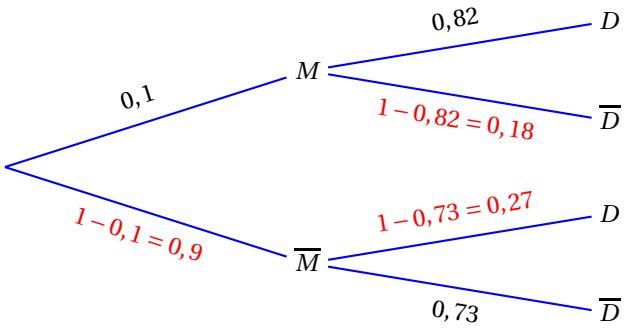
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.
On regroupe ces données dans un arbre pondéré :



1. On cherche $P(D)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(M \cap D) + P(\overline{M} \cap D) = P(M) \times P_M(D) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(D)$
$= 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27 = 0,082 + 0,243 = 0,325$

2. $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{P(\overline{D} \cap M)}{P(\overline{D})}$
$P(\overline{D} \cap M) = P(M) \times P_M(\overline{D}) = 0,1 \times 0,18 = 0,018$ et $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,325 = 0,675$
Donc $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{0,018}{0,675} \approx 0,027$
La probabilité que le patient soit malade sachant que son test de dépistage est négatif est d'environ $0,027$.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Il faut donc déterminer $P_D(M)$.
$P_D(M) = \dfrac{P(D \cap M)}{P(D)} = \dfrac{0,082}{0,325} \approx 0,252$
Une chance sur 4 correspond à 25 % soit 0,25 donc le malade a un peu plus d'une chance sur 4 d'avoir contracté la maladie.

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun. La proportion p de patients malades qui ont un dépistage positif est égale à 0,82 ; l'échantillon est de taille $n = 300$. Donc $n = 300 \geqslant 30$; $np = 300 \times 0,82 = 246 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0,18 = 54 \geqslant 5$
Les conditions sont donc vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des patients malades qui ont un test positif dans un échantillon de taille 300 :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,82 - 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}} ; 0,82 + 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}}\right]$$

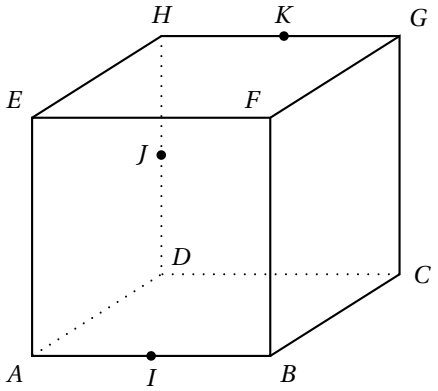
$\approx [0,77 ; 0,87]$

Le dépistage se révèle positif pour 74 % de personnes à jeun soit avec une fréquence de $f = 0,74$.

$f = 0,74 \notin I$ donc il ne faut pas pratiquer le test sur des personnes qui ne sont pas à jeun.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 3 points

$ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



On détermine les coordonnées tous les points de la figure dans le repère donné :

$A(0\,;0\,;0)$ $\quad B(1\,;0\,;0)$ $\quad D(0\,;1\,;0)$ $\quad E(0\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Longrightarrow C(1\,;1\,;0)$ $\quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow F(1\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow H(0\,;1\,;1)$ $\quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow G(1\,;1\,;1)$

I est le milieu de $[AB]$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_I &=& \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I &=& \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I &=& \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{array}\right.$ et donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$

On trouve de même : $J\left(0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_E - x_C &=& -1 \\ y_E - y_C &=& -1 \\ z_E - z_C &=& 1 \end{array}\right.$; celles de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_J - x_I &=& -\dfrac{1}{2} \\ y_J - y_I &=& 1 \\ z_J - z_I &=& \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

et celles de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_K - x_I &=& 0 \\ y_K - y_I &=& 1 \\ z_K - z_I &=& 1 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (-1)\times 1 + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = 0 + (-1)\times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IK}$

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est normal au plan (IJK).

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $\left\{\begin{array}{rcr} x_D - x_B &=& -1 \\ y_D - y_B &=& 1 \\ z_D - z_B &=& 0 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = (-1)(-1) + (-1)\times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

On pourrait préciser la réponse en démontrant que la droite (BD) n'est pas contenue dans le plan (IJK) mais ce n'est pas explicitement demandé dans le texte.

Si le point B appartient au plan (IJK), on peut dire que le point A, appartenant à la droite (BI), appartient aussi à ce plan donc les plans (ABD) et (IJK) sont confondus, ce qui est faux.

3. Soit M un point de la droite (CE) donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

On a donc $\overrightarrow{CM} = k\,\overrightarrow{CE}$ (où $k \in \mathbb{R}$), ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl} x_M - x_C &=& k \times (-1) \\ y_M - y_C &=& k \times (-1) \\ z_M - z_C &=& k \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& 1-k \\ y_M &=& 1-k \\ z_M &=& k \end{array}\right.$

Le plan (BDM) et le plan (IJK) sont parallèles, s'ils ont les mêmes vecteurs normaux; autrement dit pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est normal au plan (IJK) soit également normal au plan (BDM).

Comme ce vecteur est déjà orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$, il suffit qu'il soit orthogonal à un deuxième vecteur directeur du plan (BDM) non colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, soit $\overrightarrow{BM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{rcl} x_M - x_B &=& 1-k-1 &=& -k \\ y_M - y_B &=& 1-k-0 &=& 1-k \\ z_M - z_B &=& k-0 &=& k \end{array}\right.$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0 \iff (-k)\times(-1) + (1-k)\times(-1) + k \times 1 = 0 \iff k - 1 + k + k = 0$
$\iff k = \dfrac{1}{3}$

Donc M a pour coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{3} ; 1 - \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Le nombre 6 a pour diviseurs positifs 1, 2, 3 et 6 ; donc $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
Le nombre 7 n'a que 2 diviseurs, 1 et 7 ; donc $S(7) = 1 + 7 = 8$.

2. **a.** Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 a au moins 2 diviseurs, 1 et lui-même ; donc $S(n) \geqslant 1 + n$.

b. Les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$ sont les entiers qui ont exactement 2 diviseurs : 1 et n ; ce sont donc tous les nombres premiers.

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Si $n = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts, alors les seuls diviseurs de n sont : 1, p, q et $p \times q$.
Donc $S(n) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
L'ensemble des diviseurs de 4 est $\{1 ; 2 ; 4\}$ donc $S(4) = 1 + 2 + 4 = 7$.
On a déjà vu que $S(6) = 12$.
$4 \times 6 = 24$; les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, donc $S(24) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 60$.
$S(4) \times S(6) = 7 \times 12 = 84$ est différent de $S(4 \times 6) = 60$.
La proposition est donc fausse.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Les diviseurs de $n = p^k$ sont 1, p, p^2,..., p^k.

b. La suite $(1, p, p^2, \ldots, p^k, \ldots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison p ; on en déduit que $s(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$ d'après la formule qui donne la somme des premiers termes d'une suite géométrique : premier terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

5. On suppose que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a.

- On suppose que l'entier naturel m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.
  $\left(p^s \times p^{13-s}\right)\left(q^t \times q^{7-t}\right) = p^{13} \times q^7 \Leftrightarrow \left(p^s \times q^t\right)\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n \Leftrightarrow m\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n$.
  On peut donc dire que m est un diviseur de n.
- Soit m est un diviseur de n. On décompose m en produit de facteurs premiers ; si r est un facteur premier de la décomposition de m, alors r divise $p^{13}q^7$ donc, d'après le théorème de Gauss, r divise p^{13} ou r divise q^7, donc $r = p$ ou $r = q$.
  Donc m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.
  Comme m est un diviseur de n, on peut écrire $n = m \times m'$ où m' est un autre diviseur de n qui peut donc s'écrire $m' = p^{s'} \times q^{t'}$. Or $n = p^{13} \times q^7$ et $n = m \times m'$.
  On a donc $p^{13}q^7 = p^s q^t \times p^{s'} q^{t'}$ ce qui équivaut à $p^{13}q^7 = p^{s+s'} q^{t+t'}$.
  D'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, on peut dire que $s + s' = 13$ et que $t + t' = 7$ et comme s, s', t et t' sont des entiers naturels, on peut en déduire que $s \leqslant 13$ et que $t \leqslant 7$.
  Donc tout diviseur m de n s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Tous les diviseurs de n sont :

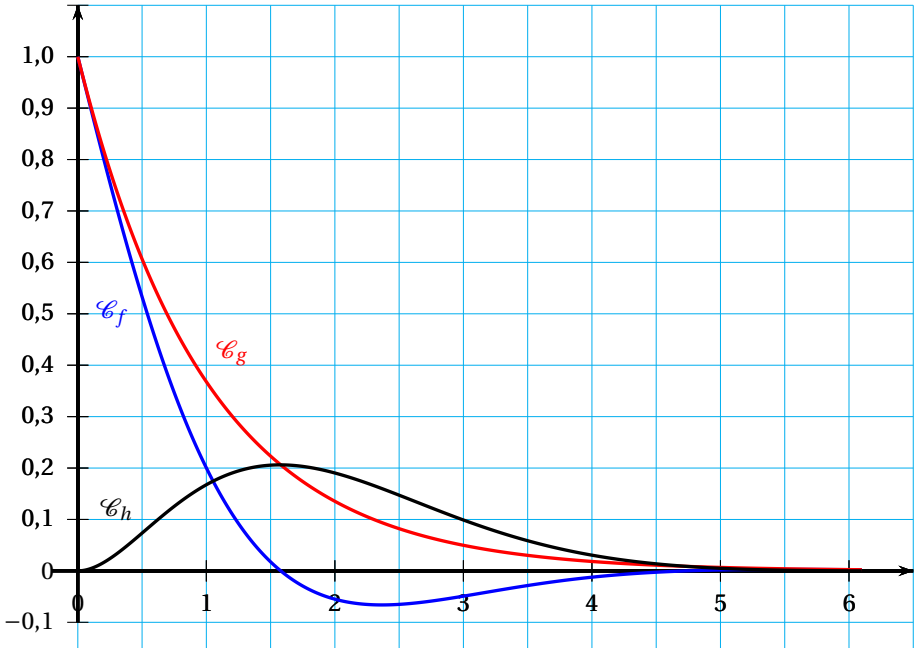
$$\begin{array}{ccccccc}
1 & p & p^2 & \ldots & p^i & \ldots & p^{13} \\
q & pq & p^2q & \ldots & p^iq & \ldots & p^{13}q \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^j & pq^j & p^2q^j & \ldots & p^iq^j & \ldots & p^{13}q^j \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q^7 & pq^7 & p^2q^7 & \ldots & p^iq^7 & \ldots & p^{13}q^7
\end{array}$$

b. La somme des $14 \times 8 = 112$ diviseurs de n est :

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right) + \left(q + pq + p^2q + \ldots + p^{13}q\right) + \ldots + \left(q^7 + pq^7 + p^2q^7 + \ldots + p^{13}q^7\right) \\
&= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right) + \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)q + \ldots + \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)q^7 \\
&= \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{13}\right)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^7\right) = \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - p^8}{1 - p}
\end{aligned}$$

Annexe

Exercice 1



Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2015

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-2nx}$
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

   a. $f_1'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-2x} + x^2 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = 2x\mathrm{e}^{-2x} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$

   b. Pour déterminer les variations de la fonction f_1, on étudie le signe de f_1' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc la fonction f_1 est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[1\,;+\infty[$, et elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

   c. On calcule la limite de f_1 en ∞ :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty\\ \text{On pose } X = -2x\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

   d. Pour tout réel x, $f_1(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = x^2\,(\mathrm{e}^{-x})^2 = (x\mathrm{e}^{-x})^2 = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2 = 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   F_1 est une primitive de f_1 donc :
   $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = F_1(1) - F_1(0) = \left(-\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) - \left(-\mathrm{e}^{0}\left(0 + 0 + \frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{5\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

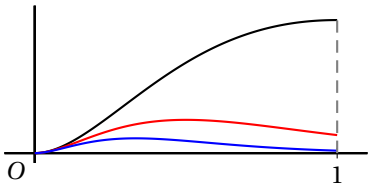
a. $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

Sur $[0;1]$, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-2nx} > 0$ donc $f_n(x) \geqslant 0$

On en déduit que I_n représente, en unités d'aire, l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ telles que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f_n(x)$.

b. Si on trace sur une calculatrice les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2 et f_3, on voit que sur $[0;1]$, $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > 0$.

Les intégrales entre 0 et 1 sont rangées dans le même ordre que les fonctions donc la suite (I_n) semble décroissante et semble tendre vers 0.



2. **a.** $f_{n+1}(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2(n+1)x} = x^2\,\mathrm{e}^{-2nx-2x} = x^2\,\mathrm{e}^{-2nx} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x} f_n(x)$

b. $x \in [0;1] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -2 \leqslant -2x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{0} \implies \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$

Sur $[0;1]$ $\left.\begin{array}{l} f_n(x) \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 \end{array}\right\} \implies \mathrm{e}^{-2x} f_n(x) \leqslant f_n(x) \iff f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

c. Sur $[0;1]$ et pour tout $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ ou autrement dit $I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Sur $[0;1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ donc, en multipliant par $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, on obtient $0 \leqslant x^2\,\mathrm{e}^{-2nx} \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ autrement dit : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$

b. $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2nx}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n} = 0$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$

On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$;

donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

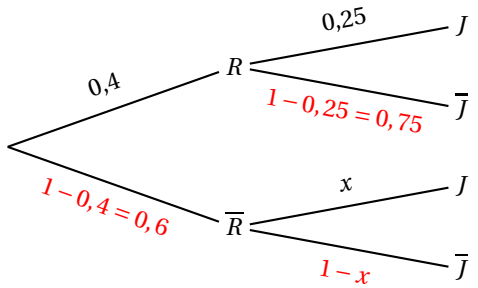
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) = P(R) \times P_R(J) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$
   $\left.\begin{array}{rcl} P(J) & = & 0,2 \\ P(J) & = & 0,1 + 0,6x \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,2 = 0,1 + 0,6x \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.
   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.
2. On cherche $P(X \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leqslant 74)$.
   À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 74) \approx 0,0016$ ce qui donne $0,998$ pour la probabilité cherchée.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

sous les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
Or $p = 0,9$ et $n = 900 \geqslant 30$, donc $np = 810 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 90 \geqslant 5$
On peut déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe : $I = [0,8804\,;\,0,9196]$

2. Dans l'échantillon, il y a 766 bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe, donc la fréquence de bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe est de $\dfrac{766}{900} \approx 0,851$.
Cette fréquence observée est en dehors de l'intervalle I, donc l'affirmation du fournisseur semble erronée.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 4 points

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1$

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -1 \iff \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}$$
$$\iff u_{n+1} = \mathrm{e}^{-1}u_n$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison e^{-1}.

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
On appelle $(\mathscr{P})$ la proposition suivante : si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.
Soit la suite définie pour tout naturel par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$: elle est bien à termes positifs et elle est majorée par 1.
Or pour tout naturel n, $w_n = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1)$; cette suite n'est pas majorée. La proposition $(\mathscr{P})$ est fausse.

3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par $\begin{cases} z_0 &= 2+3\mathrm{i} \\ z_{n+1} &= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n \Longrightarrow |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n\right| \iff |z_{n+1}| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right| \times |z_n|$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} + \frac{6}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ donc } \left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour tout n, $|z_{n+1}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$ donc la suite $(|z_n|)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $|z_0| = |2+3\,\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n, $|z_n| = |z_0| \times q^n = \sqrt{13}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

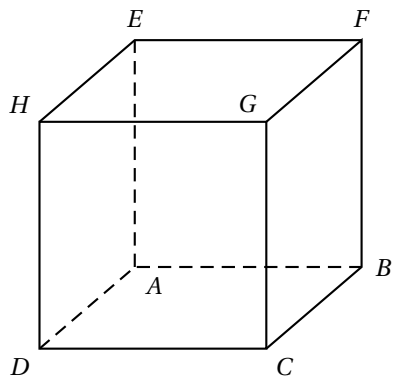
Tous les termes de la suite géométrique $(|z_n|)$ sont positifs ; la raison de cette suite est strictement comprise entre 0 et 1 donc cette suite est décroissante et converge vers 0.
Il y aura donc un plus petit rang n_0 tel que $|z_{n_0}| \leqslant 10^{-20}$ et pour tout $n \geqslant n_0$ on aura $|z_n| \leqslant 10^{-20}$.
On cherche donc n tel que $|z_n| \leqslant 10^{-20}$ ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
\sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant 10^{-20} &\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right) && \text{croissance de la fonction ln} \\
&\iff n \times \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right) && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} && \text{car } \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 136,6$ donc pour $n \geqslant 137$, on a $|z_n| \leqslant 10^{-20}$.

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$

1. **a.** La droite (DB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DB}(1\,;-1\,;0)$. Elle passe par le point D. C'est donc l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM} = s\,\overrightarrow{DB}$ où $s \in \mathbb{R}$.

   Cela s'écrit $\left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 1\times s \\ y-1 &=& (-1)\times s \\ z-0 &=& 0\times s \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& 1-s \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ où $s \in \mathbb{R}$

   b. La droite (AG) est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$ où $t \in \mathbb{R}$.
   $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc G a pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$.

   $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 1\times t \\ y-0 &=& 1\times t \\ z-0 &=& 1\times t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG). Le point M a donc pour coordonnées $(s\,;\,1-s\,;\,0)$ où $s \in \mathbb{R}$, et le point N a pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où $t \in \mathbb{R}$.
Alors $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s\,;\,t-1+s\,;\,t)$.
La droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si d'une part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux, et si d'autre part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux. ; autrement dit si $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0$ et $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0$.
$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times 1+t\times 1 = 0 \iff t-s+t-1+s+t = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \dfrac{1}{3}$
$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times(-1)+t\times 0 = 0 \iff t-s-t+1-s = 0 \iff 1 = 2s \iff s = \dfrac{1}{2}$
Les coordonnées de M sont donc $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et celles de N sont $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).

a. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s\,;\,t-1+s\,;\,t)$ donc
$MN^2 = (t-s)^2+(t-1+s)2+t^2 = t^2-2ts+s^2+t^2+1+s^2-2t-2s+2ts+t^2 = 3t^2-2t+2s^2-2s+1$
$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6} = 3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+2\left(s^2-s+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}$$
$$= 3t^2-2t+\frac{1}{3}+2s^2-2s+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 3t^2-2t+2s^2-2s+1$$
Donc $MN^2 = 3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$

b. La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal ; MN^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls qui sera minimale si chaque nombre est minimal.
Autrement dit pour que MN^2 soit minimal, il faut que $\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2$ et $\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2$ soient minimaux.
Les carrés seront minimaux s'ils sont nuls donc pour $t = \dfrac{1}{3}$ et $s = \dfrac{1}{2}$.
Dans ce cas, on a vu que la droite (MN) était la perpendiculaire commune aux deux droites (AG) et (BD).

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'équation $51x - 26y = 1$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. $51 = 3 \times 17$ et $26 = 2 \times 13$ donc les deux nombres 51 et 26 sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bézout, on peut en déduire que l'équation $51x - 26y = 1$ admet des solutions en entiers relatifs.
2. **a.** Comme $2 \times 26 = 52 = 51 + 1$, on a : $(-1) \times 51 - (-2) \times 26 = 1$ donc le couple $(x_0\,;\,y_0) = (-1\,;\,-2)$ est solution de l'équation.

   b. On cherche un couple $(x\,;\,y)$ solution donc tel que $51x - 26y = 1$; or le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution. On a donc :

$$\begin{array}{lcll} 51x & - & 26y & = 1 \\ 51x_0 & - & 26y_0 & = 1 \\ \hline 51(x-x_0) & - & 26(y-y_0) & = 0 \end{array}$$

   $51(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0 \iff 51(x - x_0) = 26(y - y_0)$

   51 divise $26(y - y_0)$; or 51 et 26 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 51 divise $y - y_0$. On peut donc écrire $y - y_0 = 51k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   $51(x - x_0) = 26(y - y_0)$ et $y - y_0 = 51k$ donc $51(x - x_0) = 26 \times 51k$ et donc $x - x_0 = 26k$.

   Si $(x\,;\,y)$ est solution, alors $x = x_0 + 26k = -1 + 26k$ et $y = y_0 + 51k = -2 + 51k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   réciproquement, si $x = -1 + 26k$ et $y = -2 + 51k$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors $51x - 26y = 1$ donc le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $51x - 26y = 1$.

   L'ensemble des couples solutions de l'équation $51x - 26y = 1$ est donc l'ensemble des couples $(-1 + 26k\,;\,-2 + 51k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. La lettre N correspond à $x = 13$ donc $51x + 2 = 51 \times 13 + 2 = 665$. Comme $665 = 25 \times 26 + 15$, le reste de la division de 665 par 26 est 15 et $f(13) = 15$. Le nombre 15 correspond à la lettre P donc la lettre N est codée en P.
2. $51a \equiv 1\ [26]$ signifie que $51a$ s'écrit $1 + 26b$ avec $b \in \mathbb{Z}$.

   $51a = 1 + 26b \iff 51a - 26b = 1$ donc, d'après la partie A, $a = -1 + 26k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On cherche k de $\mathbb{Z}$ pour que $0 \leqslant a \leqslant 25$ donc on prend $k = 1$ ce qui donne $a = 25$.

   L'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$ est $a = 25$.
3. On suppose que la lettre correspondant à un entier x est codée par la lettre correspondant à un entier y; alors y es le reste de la division de $51x + 2$ par 26 ce qui signifie que $y \equiv 51x + 2\ [26]$ et $0 \leqslant y \leqslant 15$.

   $a = 25$ donc $ay + 2 = 25y + 2$

   $y \equiv 51x + 2\ [26] \implies 25y \equiv 25 \times 51x + 25 \times 2\ [26]$

On sait que $51a \equiv 1$ [26] donc $51 \times 25 \equiv 1$ [26] et donc $25 \times 51x \equiv x$ [26]

On peut donc dire que $25y \equiv x + 50$ [26] donc que $25y + 2 \equiv x + 52$ [26].

Or $52 = 2 \times 26$ donc $52 \equiv 0$ [26]. Donc $25y + 2 \equiv x$ [26]

On sait que x est le nombre correspondant à une lettre donc $0 \leqslant x \leqslant 25$.

$$\left.\begin{array}{l} 25y + 2 \equiv x \text{ [26]} \\ 0 \leqslant x \leqslant 25 \end{array}\right\} \Longrightarrow x \text{ est le reste de la division de } 25y + 2 \text{ par } 26$$

4. La lettre N correspond au nombre 13. On cherche donc le nombre x tel que $y = f(x)$ soit égal à 13.

Si $y = 13$, alors x est le reste de la division de $25y + 2$ par 26.

$25 \times 13 + 2 = 327$ et $327 = 26 \times 12 + 15$ donc $x = 15$

La lettre qui est codée N correspond au nombre 15 donc c'est P.

5. Soit une lettre Ω correspondant au nombre x. Elle se code en une lettre Ω_1 correspondant au nombre x_1, reste de la division de $51x+2$ par 26, donc $x_1 \equiv 51x+2$ [26]. Si on cherche à coder Ω_1, on aura la lettre Ω_2 correspondant au reste x_2 de la division de $51x_1 + 2$ par 26 donc $x_2 \equiv 51x_1 + 2$ [26].

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv 51x + 2 \text{ [26]} \\ x_2 \equiv 51x_1 + 2 \text{ [26]} \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 \equiv 51(51x + 2) + 2 \text{ [26]} \Longleftrightarrow x_2 \equiv 2\,601x + 104 \text{ [26]}$$

$2\,601 = 26 \times 100 + 1$ donc $2\,601 \equiv 1$ [26] et donc $2\,601x \equiv x$ [26]

$104 = 26 \times 4$ donc $104 \equiv 0$ [26]

Donc $x_2 \equiv 2\,601x + 104$ [26] $\Longleftrightarrow$ $x_2 \equiv x$ [26]

Et comme x et x_2 sont tous les deux des restes dans la division par 26, $x_2 = x$.

Cela veut dire que si on applique deux fois la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on retrouve ce nombre : $f(f(x)) = x$.

Ce sera encore vrai si on applique un nombre pair de fois la fonction de codage.

Donc si on applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on obtient la lettre du départ.

Retour à la liste des corrigés

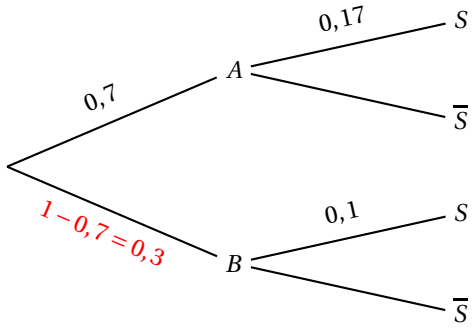
Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie
19 novembre 2015

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On regroupe les données de l'énoncé dans un arbre pondéré :



1. Il suffit de lire l'énoncé : $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.
2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,119 + P(B) \times P_B(S) \\ &= 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149 \end{aligned}$$

3. La probabilité cherchée correspond à $P_S(A) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,119}{0,149} \approx 0,799$.
4. Soit p la proportion sur l'ensemble de la production de la source A de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire. La fréquence observée sur l'échantillon de taille $n = 1000$ est $f_{obs} = \dfrac{211}{1000} = 0,211$.
Comme $n = 1000 \geqslant 30$, $nf_{obs} = 211 \geqslant 5$ et $n\left(1 - f_{obs}\right) = 789 \geqslant 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on peut proposer un intervalle de confiance au seuil de 95% qui est :

$$\left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,179 ; 0,243]$$

Partie B

1. Comme $\mu = 8$ et $\sigma = 1,6$, $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.
2. À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 6,5) \approx 0,174$.
3. La question revient à résoudre l'équation en σ : $P(Y \leqslant 6,5) = 0,1$. D'après le cours, si la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y - 9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
$Y \leqslant 6,5 \iff Y - 9 \leqslant -2,5 \iff \dfrac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma} \iff Z \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}$ donc
$P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \iff P\left(Z \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}\right) \leqslant 0,1$
On cherche, à la calculatrice, le réel β tel que $P(Z \leqslant \beta) = 0,1$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite ; on trouve $\beta \approx -1,282$.

$$\beta \approx -1,282 \iff -\frac{2,5}{\sigma} \approx -1,282 \iff \sigma \approx 1,95$$

Partie C

1. Comme $a\cos x \geqslant 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'aire du domaine cherchée correspond, en unités d'aire, à la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,\mathrm{d}x = a\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\big(1-(-1)\big) = 2a$$

2. Le problème revient à résoudre l'équation en a :

$$2a - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \iff a - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0 \iff a(4-\pi a) = 0$$

Comme a est strictement positif, la seule solution possible est $a = \dfrac{4}{\pi} > 0$.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$
$f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
$f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à $f_a(a+\ln 2) = \mathrm{e}^{a=\ln 2-a} - 2(a+\ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2 - 2a - \ln 2 + \mathrm{e}^a$.
Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - \ln 2 + \mathrm{e}^a$
$\varphi'(a) = -2 + \mathrm{e}^a$; $-2 + \mathrm{e}^a > 0 \iff \mathrm{e}^a > 2 \iff a > \ln 2$
$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que (P_2) est fausse. Par exemple, le triplet $(1\,;\,1\,;\,1)$ convient : $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \geqslant \dfrac{1}{3}$ mais $1 + 1 + 1 = 3 \neq 1$.

Partie B

1. **a.** Il suffit de vérifier que les trois points non alignés B, D et E appartiennent au plan d'équation $x+y+z=1$.
Avec $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$, c'est bien le cas :

$$1+0+0=0+1+0=0+0+1=1$$

b. Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE). Prenons $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=-1+1+0=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+0+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$$

Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c. D'après la question précédente, on sait que (AG) et (BDE) sont sécants en un unique point. Il suffit donc de prouver que K appartient à la droite et au plan.
— Comme $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$, le point K appartient à (AG).
— Comme $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$, le point K appartient à (BDE).
Donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

2. Les côtés du triangle BDE sont les diagonales des faces du cube qui sont isométriques donc ils sont de même longueur et BDE est un triangle équilatéral.

3. **a.** Si M est un point du plan (BDE) distinct de K, d'après la question (**1b**), le triangle AMK est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a alors :

$$AM^2=AK^2+MK^2$$

Si $M=K$, la relation est encore vraie donc elle est vraie pour tout point M de (BDE).

b. Comme $MK^2\geqslant 0$, la relation $AM^2\geqslant AK^2$ se déduit trivialement de la précédente.

c. Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant l'égalité $x+y+z=1$. Le point $M(x;y;z)$ appartient donc au plan (BDE).
D'après (**3b**), on a alors $AM^2\geqslant AK^2$ qui s'écrit, avec les coordonnées :

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$

L'implication (P_1) est donc vraie.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\begin{cases} d_1 &= \dfrac{1}{2}d_0+100=250\\ a_1 &= \dfrac{1}{2}d_0+\dfrac{1}{2}a_0+70=445\end{cases}$

2. **a.** On obtient en sortie $D=250$ et $A=420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (**1**).

b. Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{E}{2}+70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. **a.** Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}\left(d_n - 200\right) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

b. D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$$

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n = 200$.
La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. **a.** $2n^2 - (n+1)^2 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)n + 1\right)$.
D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré, $2n^2 - (n+1)^2$ est donc positif pour $n \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ou $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2,4$.
Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2$$

b. Pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ donc la propriété est initialisée.
Supposons qu'il existe un entier $k > 4$ tel que $2^k \geqslant k^2$. En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2$$

La propriété est donc héréditaire.
Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4.

c. D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0 < n^2 \leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Longrightarrow 0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

d. D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{100}{n} = 0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 340.$$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** D'après l'énoncé, le nombre d'avancés au début du mois $n+1$ sera composé de la moitié des débutants du mois précédent passant au niveau avancé soit $\dfrac{1}{2}d_n$, de la moitié du nombre des avancés ne s'étant pas désinscrits soit $\dfrac{1}{2}a_n$ et des 70 personnes qui se sont inscrites en début du mois.

On obtient bien :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70$$

b. En posant $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous la forme matricielle :

$$U_{n+1} = Au_n + B$$

c. Pour $n = 1$, on a bien $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(I_2 + T)$.

Supposons que la relation soit vérifiée pour un certain entier k non nul. En multipliant l'expression $A^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(I_2 + kT\right)$ par $A = \dfrac{1}{2}\left(I_2 + T\right)$ à gauche ou à droite car I_2 et T commutent, on obtient :

$$A^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(I_2 + kT\right) \times \frac{1}{2}\left(I_2 + T\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left(I_2 + T + kT + kT^2\right)$$

Or, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit qu'elle est nilpotente d'ordre 2.

Donc $A^{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} \left(I_2 + (k+1)T\right)$ et la relation est héréditaire.

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a.** Comme $\det(I_2 - A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{4} \neq 0$, la matrice $I_2 - A$ est inversible et on a $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } C = AC + B \iff (I_2 - A)C = B \iff C = (I_2 - A)^{-1}B$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}.$$

b. Il suffit de se servir des question précédentes on remarquant que $\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = C = AC + B$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C \iff V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) \iff U_{n+1} = A(U_n - C) = AV_n$$

c. On a $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$.

Par définition de V_n, on a aussi : $U_n = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat de la question (**1c**), on obtient, par calcul matriciel :

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(I_2 + nT\right)\begin{pmatrix}100\\110\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\110\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200\\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340\end{pmatrix}.$$

3. **a.** En admettant que pour $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2 > 0$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de l'inégalité par $100n$, on obtient, après simplification :

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$$

b. D'après les théorèmes d'encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100}{n} = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de suites géométriques de raison $\dfrac{1}{2}$, on sait aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Enfin, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix}\lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix}$$

La fréquentation se stabilise, à long terme, autour de 200 internautes débutants et 340 internautes avancés.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $u(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$ où a, b et c sont des réels fixés.

1. La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point A$(1\,;0)$ donc $u(1) = 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point B$(4\,;0)$ donc $u(4) = 0$.
2. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right) = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$$
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a\end{array}\right\} \Longrightarrow a = 1 \text{ donc } u(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$$
3. D'après la première question $u(1) = 0$ ce qui équivaut à $1 + \dfrac{b}{1} + \dfrac{c}{1^2} = 0 \Longleftrightarrow b + c = -1$.
   De même $u(4) = 0$ équivaut à $1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{4^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0 \Longleftrightarrow 4b + c = -16$.
   On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} b + c &=& -1\\ 4b + c &=& -16\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& -1 - b\\ 4b - 1 - b &=& -16\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& 4\\ b &=& -5\end{array}\right.$
   Donc pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $u(x) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2 - 5x\ln x - 4}{x}$
   $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2 - 5x\ln x - 4\right) = -4\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x^2 - 5x\ln x - 4}{x} = -\infty$$
   donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$
2. $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x} = x\left(1 - 5\dfrac{\ln x}{x}\right) - \dfrac{4}{x}$
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - 5\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 5\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0\end{array}\right\}$$
   $$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 5\dfrac{\ln x}{x}\right) - \dfrac{4}{x} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$f'(x) = 1 - 5 \times \dfrac{1}{x} - 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} = u(x)$

$u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x-4)}{x^2}$; on peut donc déterminer le signe de $u(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et donc le signe de $f'(x)$.

$u(x)$ s'annule pour $x = 1$ et $x = 4$; $f(1) = -3$ et $f(4) = 3 - 5\ln 4 \approx -3,93$

On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x) = u(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$3 - 5\ln 4$	↗	$+\infty$

Partie C

1. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure fournie avec le texte ; c'est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $u(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Pour tout x de $[1\,;\,4]$, $u(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{A} = -\displaystyle\int_1^4 u(x)\,\mathrm{d}x$

$f'(x) = u(x)$ donc la fonction f est une primitive de la fonction u et donc $\displaystyle\int_1^4 u(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1)$.

On en déduit que $\mathscr{A} = f(1) - f(4) = -3 - (3 - 5\ln 4) = 5\ln 4 - 6$ unité d'aire.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que $4 \leqslant x \leqslant \lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant u(x)$.

Sur $[4\,;\,+\infty[$, $u(x) \geqslant 0$ et donc l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ est égale, en unité d'aire, à $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x = f(\lambda) - f(4)$; on cherche donc λ tel que $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}$ ce qui équivaut à

$f(\lambda) - f(4) = 5\ln 4 - 6 \iff f(\lambda) - (3 - 5\ln 4) = 5\ln 4 - 6 \iff f(\lambda) = -3$

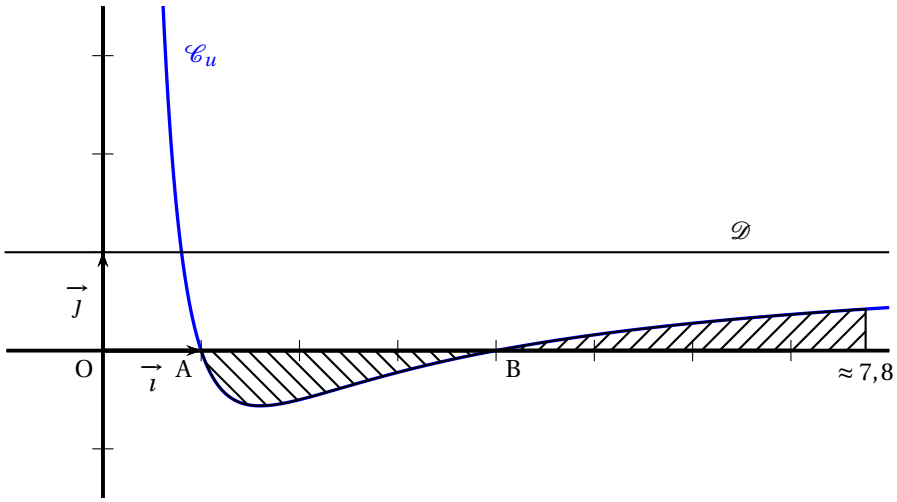
On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		λ		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$3 - 5\ln 4 \approx -3,93$	↗	-3	↗	$+\infty$

On peut conclure qu'il existe une unique valeur λ telle que $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.

Remarque : $f(7) \approx -3,30$ et $f(8) \approx -2,90$ donc $\lambda \in [7\,;\,8]$

$f(7,7) \approx -3,03$ et $f(7,8) \approx -2,98$ donc $\lambda \in [7,7\,;\,7,8]$



EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées : A(3 ; −1 ; 4), B(−1 ; 2 ; −3), C(4 ; −1 ; 2).
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -1+4t \\ y = 4-t \\ z = -8+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

En détaillant son écriture paramétrique, on peut dire que la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(4;-1;2)$.
La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1;0;-2)$.
$\vec{v}.\overrightarrow{\text{AC}} = 4\times 1+(-1)\times 0+2\times(-2)=0$ donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux; on peut en déduire que les droites Δ et (AC) sont orthogonales.
Affirmation 1 vraie

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

- Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.
  $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-4;3;-7)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(1;0;-2)$.
  Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignes; ils déterminent donc le plan (ABC).
- Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$ si les coordonnées des trois points A, B et C vérifient cette équation.
  - $2x_{\text{A}}+5y_{\text{A}}+z_{\text{A}}-5=2\times 3+5\times(-1)+4-5=0$
  - $2x_{\text{B}}+5y_{\text{B}}+z_{\text{B}}-5=2\times(-1)+5\times 2+(-3)-5=0$
  - $2x_{\text{C}}+5y_{\text{C}}+z_{\text{C}}-5=2\times 4+5\times(-1)+2-5=0$

Les coordonnées des trois points vérifient l'équation du plan donc ces points appartiennent au plan.
Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$.
Affirmation 2 vraie

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par
$\left\{\begin{array}{l} x = 1+s-2s' \\ y = 1-2s+s' \\ z = 1-4s+2s' \end{array}\right.$, $s\in\mathbb{R}$, $s'\in\mathbb{R}$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Soient s et s' deux réels et M le point de coordonnées $(1+s-2s' ; 1-2s+s' ; 1-4s+2s')$.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x-3y+2z-7=0$.

$$\begin{aligned}2x_{\text{M}}-3y_{\text{M}}+2z_{\text{M}}-7 &= 2(1+s-2s')-3(1-2s+s')+2(1-4s+2s')-7\\ &= 2+2s-4s'-3+6s-3s'+2-8s+4s'-7=-6-3s'\end{aligned}$$

n'est pas égal à 0 pour tout s'.
Affirmation 3 fausse

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ.

Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ si et seulement si la droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(4 ; -1 ; 2)$. Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2 ; -3 ; 2)$.
La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
$\vec{v}\,.\,\vec{n}=4\times 2+(-1)\times(-3)+2\times 2=15\neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite Δ n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$.
Affirmation 4 fausse

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

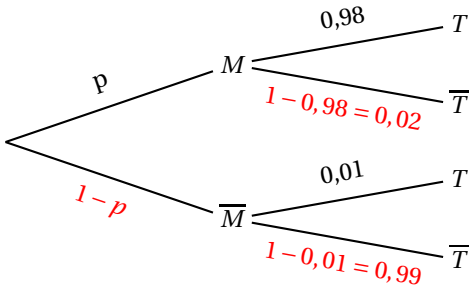
— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).
On note p $(0\leqslant p\leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** On complète l'arbre de probabilité :



b. D'après l'arbre :

- $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=p\times 0,98=0,98p$
- $P(\overline{M}\cap T)=P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)=(1-p)\times 0,01=0,01-0,01p$

D'après la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap T)=0,98p+0,01-0,01p=0,097p+0,01$

2. **a.** La probabilité de M sachant T est $P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,98p}{0,97p+0,01}=\dfrac{98p}{97p+1}=f(p)$ où f est définie sur $[0 ; 1]$.

b. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0;1]$ donc dérivable sur $[0;1]$ et :
$f'(p) = \dfrac{98 \times (97p+1) - 98p \times 97}{(97p+1)^2} = \dfrac{98}{(97p+1)^2} > 0$ sur $[0;1]$
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;1]$.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
La probabilité $f(p)$ qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est égale à 0,95 quand la proportion p est solution de l'équation $f(p) = 0,95$:
$f(p) = 0,95 \iff \dfrac{98p}{97p+1} = 0,95 \iff 9\,800p = 95 \times (97p+1) \iff 585p = 95 \iff p = \dfrac{19}{117}$ soit approximativement 0,162.
La fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$ donc si $p > \dfrac{19}{117}$, alors $f(p) > 0,95$.
C'est donc à partir d'une proportion $p = \dfrac{19}{117} \approx 16,2\,\%$ de malades dans la population que le test sera fiable.

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.
Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. **a.** On prend $p = 0,15$.
Pour une personne prise au hasard, il n'y a que deux issues possibles : elle est malade (avec une probabilité $p = 0,15$) ou elle n'est pas malade (avec la probabilité $1 - p = 0,85$).
On choisit 1 000 personnes, ce qui revient à une répétition de façon indépendante de 1 000 tirages avec remise.
La variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes malades dans un échantillon de 1 000 personnes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,15$.

b. Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus donc la fréquence observée est $f = 0,197$.
$n = 1\,000 \geqslant 30$, $np = 150 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 850 \geqslant 5$ donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation I de la fréquence F de personnes malades au seuil de 95 % :
$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0,15 - 1,96\frac{\sqrt{0,15 \times 0,85}}{\sqrt{1000}} ; 0,15 + 1,96\frac{\sqrt{0,15 \times 0,85}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [0,127 ; 0,173]$$
Comme $0,197 \notin [0,127 ; 0,173]$ on peut en déduire que l'hypothèse d'un pourcentage de 15 % est sous-évaluée.

2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.
On sait que $f = 0,197$; $n = 1\,000 \geqslant 30$, $nf = 197 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 803 \geqslant 5$. On peut donc déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % autour de la fréquence observée :
$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,197 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}} ; 0,197 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,165 ; 0,229]$$

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 10$. On souhaite déterminer sa moyenne μ.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de T est donnée en annexe.

1. **a.** D'après le graphique donné en annexe, on peut conjecturer que $\mu \approx 120$.

   b. Voir graphique en annexe.

2. On note T' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T-\mu}{10}$.

   a. D'après le cours, si la loi T suit la loi normale de paramètres μ et $\sigma = 10$, alors la variable aléatoire $T' = \dfrac{T-\mu}{10}$ suit la loi normale centrée réduite.

   b. $T < 110 \iff T-\mu < 110-\mu \iff \dfrac{T-\mu}{10} < \dfrac{110-\mu}{10} \iff T' < \dfrac{110-\mu}{10}$

   Donc $P(T < 110) = 0,18 \iff P\left(T' < \dfrac{110-\mu}{10}\right) = 0,18$

   On cherche à la calculatrice le réel β tel que $P(T' < \beta) = 0,18$ sachant que T' suit la loi normale centrée réduite. On trouve $\beta \approx -0{,}915$.

   On résout $\dfrac{110-\mu}{10} = -0{,}915$ et on trouve $\mu \approx 119$ valeur proche de celle de la conjecture faite à la question 1.

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. La population totale est constante et égale à 120 millions donc, pour tout entier naturel n, on peut dire que $u_n + v_n = 120$.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

   Dans B3 on entre la formule `=0,9*B2+0,05*C2`.

   Dans C3 on entre la formule `=0,1*B2+0,95*C2`.
3. D'après les données du tableur, la suite (u_n) (donc le nombre de ruraux) semble décroitre et tendre vers 40 millions, et la suite (v_n) (donc le nombre de citadins) semble croitre et tendre vers 80 millions.

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n > u_{n+1}$.

- $u_0 = 90$ et $u_1 = 0,85u_0 = 0,85 \times 90 + 6 = 82,5$ donc $u_0 > u_1$
  La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p > u_{p+1}$.
  $u_p > u_{p+1} \iff 0,85u_p > 0,85u_{p+1} \iff 0,85u_p + 6 > 0,85u_{p+1} + 6 \iff u_{p+1} > u_{p+2}$
  Donc la propriété est vraie au rang $p+1$; elle est héréditaire.
- $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n, $u_n > u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n, donc la suite (u_n) est minorée par 0.
On a vu que la suite était décroissante.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$, donc $u_n = w_n + 40$.

a.
- $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85(w_n + 40) - 34 = 0,85w_n + 34 - 34 = 0,85w_n$
- $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $w_0 = 50$.

b. D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n : $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0,85^n$
Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, on peut dire que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$

c. Pour tout n, $\left.\begin{array}{l} u_n + v_n = 120 \\ u_n = 50 \times 0,85^n + 40 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n = 80 - 50 \times 0,85^n$

3.
- Pour tout n, $w_n = 50 \times 0,85^n$ donc $w_n > 0$
  $w_{n+1} = 0,85w_n < w_n$ et donc la suite (w_n) est décroissante.
  Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) est décroissante.
- (w_n) est géométrique de raison 0,85 ; or $-1 < 0,85 < 1$ donc la suite (w_n) converge vers 0.
  Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) converge vers 40.
- Pour tout n, $v_n = 120 - u_n$ et la suite (u_n) est décroissante, donc la suite (v_n) est croissante.
- La suite (u_n) est convergente vers 40 et, pour tout n, $v_n = 120 - u_n$, donc la suite (v_n) est convergente vers $120 - 40 = 80$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Dans cet algorithme, la variable u, initialisée à 90, représente le terme u_n, et $120 - u$ représente donc v_n.
On sort de la boucle « tant que » dès que $u < 120 - u$ c'est-à-dire dès que $u_n < v_n$; l'algorithme affiche donc la plus petite valeur n pour laquelle $u_n < v_n$.
C'est la plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de ruraux est devenu inférieur au nombre de citadins.

b. D'après le tableur, $u_5 > v_5$ et $u_6 < v_6$ donc la valeur affichée sera 6.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;

- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$;
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. D'après le texte : $\left\{\begin{array}{rcl} R_{n+1} & = & 0,9R_n + 0,05C_n \\ C_{n+1} & = & 0,1R_n + 0,95C_n \end{array}\right.$ ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$ ou encore $U_{n+1} = MU_n$

b. $U_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc $U_1 = MU_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 90 + 0,05 \times 30 \\ 0,1 \times 90 + 0,95 \times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$

Donc il y a 87,5 millions de ruraux et 37,5 de citadins en 2011.

2. D'après le cours, on sait que si, pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = MU_n$ alors $U_n = M^n U_0$.

La démonstration par récurrence de cette propriété a été faite plusieurs fois au cours de l'année ; elle peut donc être considérée comme faisant partie du cours.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Soit P' la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$; on remarque que $P' = \dfrac{1}{3}P$.

$P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$ où I est la matrice identité d'ordre 2 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $P \times P' = P \times \dfrac{1}{3}P = \dfrac{1}{3}P \times P = \dfrac{1}{3} \times 3I = I$ et que : $P' \times P = \dfrac{1}{3}P \times P = \dfrac{1}{3} \times 3I = I$

Donc la matrice P' est l'inverse de la matrice P ; on l'appelle alors P^{-1}.

4. **a.** On pose $\Delta = P^{-1}MP$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. On utilise les propriétés de la matrice identité et l'associativité du produit des matrices :

$$\begin{aligned} \Delta = P^{-1}MP &\iff P\Delta = P(P^{-1}MP) \iff P\Delta = (PP^{-1})MP \iff P\Delta = IMP \iff P\Delta = MP \\ &\iff (P\Delta)P^{-1} = (MP)P^{-1} \iff P\Delta P^{-1} = M(PP^{-1}) \iff P\Delta P^{-1} = MI \\ &\iff P\Delta P^{-1} = M \\ &\iff M = P\Delta P^{-1} \end{aligned}$$

c. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $M^n = P\Delta^n P^{-1}$

- Pour $n = 1$: $M^n = M$ et $P\Delta^n P^{-1} = P\Delta P^{-1} = M$ (vu à la question précédente).
  Donc la propriété est vraie au rang 1.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 1$ c'est à dire $M^p = P\Delta^p P^{-1}$
  $M^{p+1} = M^p \times M = P\Delta^p P^{-1} \times P\Delta P^{-1} = P\Delta^p (P^{-1}P)\Delta P^{-1} = P\Delta^p \Delta P^{-1} = P\Delta^{p+1}P^{-1}$
  La propriété est donc démontrée au rang $p+1$.
- La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 1 ; elle est héréditaire.
  Donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = P\Delta^n P^{-1}$

5. **a.** On admet que : $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $U_n = M^n U_0$ donc

$$\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) \times 90 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \times 30 \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) \times 90 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \times 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n \\ 60 - 60 \times 0,85^n + 20 + 10 \times 0,85^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 50 \times 0,85^n \\ 80 - 50 \times 0,85^n \end{pmatrix}$$

Donc $R_n = 40 + 50 \times 0,85^n$ et $C_n = 80 - 50 \times 0,85^n$

b. La suite $(0,85^n)$ est géométrique de raison $0,85$; or $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 50 \times 0,85^n = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 80$.

6. **a.** On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.

Voir l'algorithme donné en annexe.

b. On résout l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$

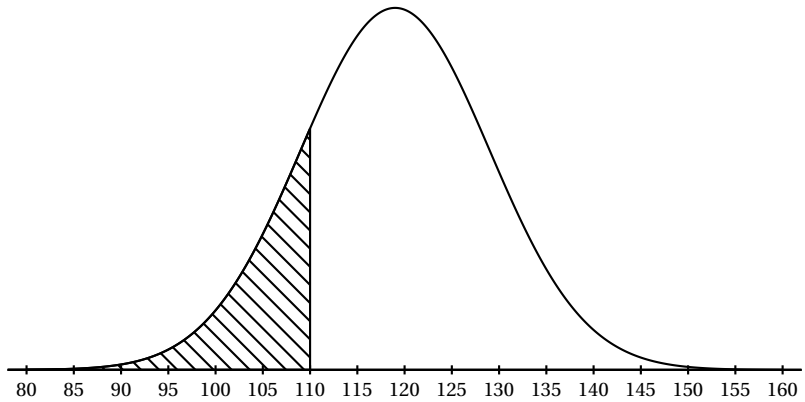
$R_n < C_n$	$\iff 50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$	
	$\iff 100 \times 0,85^n < 40$	
	$\iff 0,85^n < 0,4$	
	$\iff \ln(0,85^n) < \ln 0,4$	la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$
	$\iff n \times \ln 0,85 < \ln 0,4$	propriété de la fonction ln
	$\iff n > \dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,85}$	car $\ln 0,85 < 0$

$\dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,85} \approx 5,6$ donc la valeur de n donnée par l'algorithme est 6.

Annexe

Exercice 3 Partie C Question 1
(à compléter et à remettre avec la copie)

Courbe représentative de la fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,10^2\right)$



Exercice 4 Spécialité
Question 6

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	R prend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que $R \geqslant C$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
	C prend la valeur $80 - 50 \times 0,85^n$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Corrigé du Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

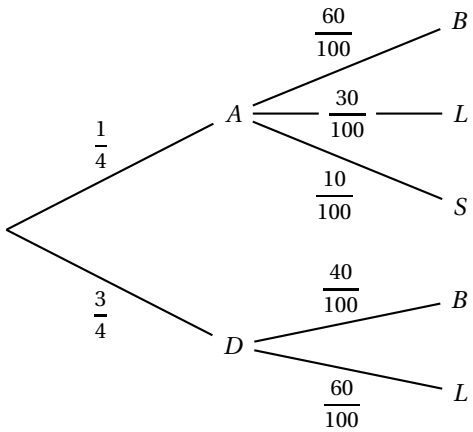
D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. On peut représenter les données de l'exercice sous forme d'un arbre pondéré :



a. L'événement « la médaille tirée est argentée et représente le château de Langeais » est $A \cap L$.
$P(A \cap L) = P(A) \times P_A(L) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{40}$

b. On cherche $P(L)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(L) = P(A \cap L) + P(D \cap L) = P(A) \times P_A(L) + P(D) \times P_D(L) = \dfrac{3}{40} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{40} + \dfrac{18}{40} = \dfrac{21}{40}$

c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, la probabilité que celle-ci soit dorée est $P_L(D)$:

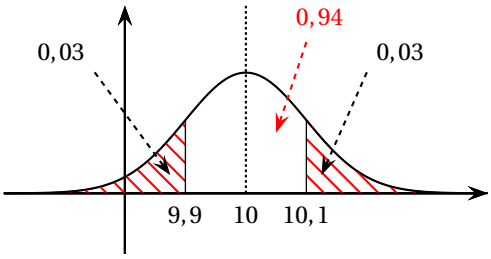
$$P_L(D) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{10}}{\frac{21}{40}} = \frac{\frac{18}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

2. Il n'y a pas de médaille dorée représentant le château de Saumur donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est de 1.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
   La probabilité qu'une médaille soit conforme est $P(C) = P(9,9 \leqslant X \leqslant 10,1)$ et la probabilité qu'une médaille soit non conforme est $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$.
   D'après la calculatrice, $P(C) = P(9,9 \leqslant X \leqslant 10,1) \approx 0,904$. Donc $P(\overline{C}) \approx 0,096$.
2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y-10}{\sigma}$.
   D'après le cours, on peut dire que la variable Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Cette machine produit 6 % de pièces non conformes, ce qui veut dire que $P(\overline{C}) = 0,06$.
   Une médaille est non conforme si $(Y < 9,9)$ ou $(Y > 10,1)$; la variable aléatoire Y est de moyenne 10 donc, par symétrie, $P(Y < 9,9) = P(Y > 10,1)$.
   Il faut donc chercher l'écart type σ pour que $P(Y < 9,9) = \dfrac{0,06}{2}$, autrement dit pour que $P(Y < 9,9) = 0,03$.



$Y < 9,9 \iff Y - 10 < 9,9 - 10 \iff \dfrac{Y-10}{\sigma} < \dfrac{9,9-10}{\sigma} \iff Z < \dfrac{-0,1}{\sigma}$ car $\sigma > 0$

Donc $P(Y < 9,9) = 0,03 \iff P\left(Z < -\dfrac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

On cherche β tel que $P(Z < \beta) = 0,03$ à la calculatrice, et on trouve $\beta \approx -1,8808$.

Donc $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,8808 \iff \sigma \approx 0,053$

Pour que la machine M_2 produise 6 % de pièces non conformes, il faut que $\sigma \approx 0,053$.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en **annexe 1**.
Pour tout x, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $1 - \cos(x) \geqslant 0$; on en déduit que $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout x de $[0\,;\,16]$.
On cherche les abscisses des points A et B ; comme ce sont des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, ces abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:
$f(x) = g(x) \iff \ln(x+1) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \iff \cos(x) = 1 \iff x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0; 16]$ sont 0, 2π et 4π.
On en déduit que $x_A = 2\pi$ et $x_B = 4\pi$.
Comme sur $[0; 16]$, $g(x) \geqslant f(x)$:

- l'aire de la surface **1** est donnée par $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_{x_O}^{x_A} \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x$
- l'aire de la surface **2** est donnée par $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_{x_A}^{x_B} \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{4\pi} \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x$

$g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$ qui a pour primitive $x \longmapsto x - \sin(x)$. Donc :

- $\mathscr{A}_1 = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = [2\pi - \sin(2\pi)] - [0 - \sin(0)] = 2\pi$
- $\mathscr{A}_2 = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = [4\pi - \sin(4\pi)] - [2\pi - \sin(2\pi)] = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

Les deux surfaces hachurées sur le graphique ont donc la même aire égale à 2π.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 6 points

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation $\dfrac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \dfrac{1}{2}mz - 3 = 0$.

1. Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\dfrac{1}{4}m^2x_A + (m-1)y_A + \dfrac{1}{2}mz_A - 3 = 0 \iff$ $\dfrac{1}{4}m^2 + (m-1) + \dfrac{1}{2}m - 3 = 0 \iff \dfrac{1}{4}m^2 + \dfrac{3}{2}m - 4 = 0 \iff m^2 + 6m - 16 = 0$

$\Delta = 36 + 64 = 100$ donc cette équation admet 2 solutions $m' = \dfrac{-6+10}{2} = 2$ et $m'' = \dfrac{-6-10}{2} = -8$.

Le point A appartient au plan P_m pour $m = 2$ ou $m = -8$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z - 3 = 0$ ou encore $x + 2z - 12 = 0$.

Le plan P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$.

On cherche l'intersection de ces deux plans :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12 &=& 0\\ 4x-5y-2z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -4(12-2z)+2z+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -48+8z+2z+3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -45+10z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ y &=& 9-2z\end{array}\right.$$

En posant $z = t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. **a.** Le plan P_0 a pour équation $-y - 3 = 0$.

Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\\ -y-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ -3 &=& 9-2t\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ t &=& 6\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -3\\ z &=& 6\\ t &=& 6\end{array}\right.$$

L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point B $(0 ; -3 ; 6)$.

b. Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \dfrac{1}{2}mz - 3 = 0$.

On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :

$\dfrac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \dfrac{1}{2}mz_B - 3 = 0 + (m-1)(-3) + \dfrac{1}{2}m \times 6 - 3 = -3m + 3 + 3m - 3 = 0$

Donc le point B appartient au plan P_m, quelle que soit la valeur du réel m.

c. Soit H $(a ; b ; c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.

Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :

$\dfrac{1}{4}m^2a + (m-1)b + \dfrac{1}{2}mc - 3 = 0$

On donne à m des valeurs particulières :

- Pour $m = 0$, on obtient $-b - 3 = 0$ donc $b = -3$.

- Pour $m = 2$, on obtient $a + (2-1)(-3) + c - 3 = 0$, soit $a + c = 6$.
- Pour $m = -2$, on obtient $a + (-2-1)(-3) - c - 3 = 0$, soit $a - c = -6$.

On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c &=& 6\\ a-c &=& -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 0\\ a+c &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0\\ c &=& 6\end{array}\right.$

Le point H a donc pour coordonnées $(0 ; -3 ; 6)$ donc c'est le point B.

Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

Autre méthode géométrique :

L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.

On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).

On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.

Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.

Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \text{ et } -10 \leqslant m' \leqslant 10$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Le plan P_1 a pour équation $x + 2z - 12 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_1\ (1 ; 0 ; 2)$.

Le plan P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_{-4}\ (4 ; -5 ; -2)$.

$\overrightarrow{n}_1 . \overrightarrow{n}_{-4} = 1 \times 4 + 0 + 2 \times (-2) = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.

Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

b. Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \dfrac{1}{2}mz - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\left(\dfrac{1}{4}m^2 ; m-1 ; \dfrac{1}{2}m\right)$.

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\dfrac{1}{4}m'^2x + (m'-1)y + \dfrac{1}{2}m'z - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'\left(\dfrac{1}{4}m'^2 ; m'-1 ; \dfrac{1}{2}m'\right)$.

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$$P_m \perp P_{m'} \iff \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}' \iff \overrightarrow{n} . \overrightarrow{n}' = 0 \iff \frac{1}{4}m \times \frac{1}{4}m' + (m-1)(m'-1) + \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m' = 0$$

$$\iff \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\left(m'-1\right) + \frac{mm'}{4} = 0$$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2 + 16(m-1)\left(m'-1\right) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $\left(m\ ;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m ; m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\left(m'-1\right) + \dfrac{mm'}{4} = 0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$.

Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\ ;\ -4)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(-4\ ;\ 5)$.

Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$(-4\ ;\ 1) ; (-4\ ;\ 5) ; (0\ ;\ 1) ; (1\ ;\ -4) ; (1\ ;\ 0) ; (5\ ;\ -4)$$

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout n, par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. **a.** $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$ donc $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$

On cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{l c l} \cos\theta & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

On a donc $1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. $z_1 = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

2. **a.** Soit P_n la propriété $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$

- Pour $n = 0$: $z_0 = 1$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$; donc P_0 est vraie.
- On suppose P_p vraie pour $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_p = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{\pi}{6}}$

  $z_{p+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_p = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)\frac{\pi}{6}}$
- La propriété es vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

b. Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si le point A_n est sur l'axe des réels, autrement dit si son affixe est réelle, donc si son argument vaut $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$; on doit donc avoir : $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi$ ce qui équivaut à $n = 6k$.
Les points O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 6.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ donc d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1} : $d_n = A_nA_{n+1}$

b. $d_0 = z_1 - z_0 = \left|1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c. Pour tout n

$$\begin{array}{rrcl} & z_{n+2} & = & \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} \\ & z_{n+1} & = & \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n \\ \hline \text{Par soustraction} & z_{n+2} - z_{n+1} & = & \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n) \end{array}$$

d. On en déduit que :

$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}d_n$

On sait que $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc on peut dire que la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

D'après les propriétés des suites géométriques, $d_n = d_0 \times q^n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ pour tout n.

4. **a.** D'après les questions précédentes, pour tout n :

$|z_n| = \left|\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $|z_n|^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

De même $|z_{n+1}| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ donc

$|z_{n+1}|^2 = \left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $d_n^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = |z_{n+1}|^2$

b. On sait que $|z_{n+1}| = OA_{n+1}$, que $|z_n| = OA_n$ et que $d_n = A_nA_{n+1}$
Donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$ équivaut à $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c. Voir construction de A_5 en annexe.

d.
- Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le point A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4.
- z_5 a pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$ et z_3 a pour argument $\dfrac{3\pi}{6}$; donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_5}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. On trace donc le triangle équilatéral direct OA_3A_3' et le point A_5 appartient à (OA_3').

Le point A_5 est à l'intersection des droites d et (OA_3').

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

1. La lettre L correspond à $x = 11$; $7 \times 11 + 5 = 82$ qui a pour reste 4 dans la division par 26.
Le nombre 4 correspond à E donc la lettre L est codée E.

2. **a.** Soit k un entier relatif ; $k \equiv 7x\ [26] \implies 15k \equiv 15 \times 7x\ [26]$
Or $15 \times 7 = 105 = 4 \times 26 + 1$ donc $105 \equiv 1\ [26]$ et $105x \equiv x\ [26]$
Donc $k \equiv 7x\ [26] \implies 15k \equiv x\ [26]$

b. Soit k un entier relatif ; $15k \equiv x\ [26] \implies 7 \times 15k \equiv 7x\ [26]$
Or, on a vu que $7 \times 15 = 105 \equiv 1\ [26]$ donc $105k \equiv k\ [26]$
Donc $15k \equiv x\ [26] \implies k \equiv 7x\ [26]$
On a donc démontré que : $15k \equiv x\ [26] \iff k \equiv 7x\ [26]$

c. $y \equiv 7x + 5\ [26] \iff y - 5 \equiv 7x\ [26]$
$\iff 15(y-5) \equiv x\ [26]$ voir question précédente avec $k = 7y - 5$
$\iff 15y - 75 \equiv x\ [26]$
Or $-75 = 26 \times (-3) + 3$ donc $-75 \equiv 3\ [26]$ et donc $15y - 75 \equiv 15y + 3\ [26]$
On en déduit que $15y - 75 \equiv x\ [26] \iff 15y + 3 \equiv x\ [26]$ et donc que
$y \equiv 7x + 5\ [26] \iff 15y + 3 \equiv x\ [26]$

3. D'après les questions précédentes, pour **décoder** une lettre, on cherche à quel nombre y elle correspond, puis on détermine x entre 0 et 25 tel que $y \equiv 7x + 5\ [26]$ donc tel que $x \equiv 15y + 3\ [26]$.
La lettre F correspond à $y = 5$; $15y + 3 = 78$ qui a pour reste 0 dans la division par 26.
Le nombre 0 correspond à la lettre A donc le décodage de la lettre F donne la lettre A.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.
Soit P_n la propriété : $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$

- Pour $n = 0$, $\left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^0 - \dfrac{5}{6} = a_0 + \dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{6} = a_0$; donc P_0 est vérifiée.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$; c'est-à-dire $a_p = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^p - \dfrac{5}{6}$
$a_{p+1} = 7a_p + 5 = 7\left(\left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^p - \dfrac{5}{6}\right) + 5 = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^{p+1} - 7 \times \dfrac{5}{6} + 5 = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^{p+1} - \dfrac{35}{6} + \dfrac{30}{6}$
$= \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^{p+1} - \dfrac{5}{6}$
Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n, $b_n = \left(b_0 + \dfrac{3}{14}\right) \times 15^n - \dfrac{3}{14}$.

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A. Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H. Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
On veut décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.
Première méthode
On cherche une lettre qui codée 6 fois de suite donne la lettre Q. Autrement dit, il suffit de décoder 6 fois de suite la lettre Q pour obtenir le résultat demandé.

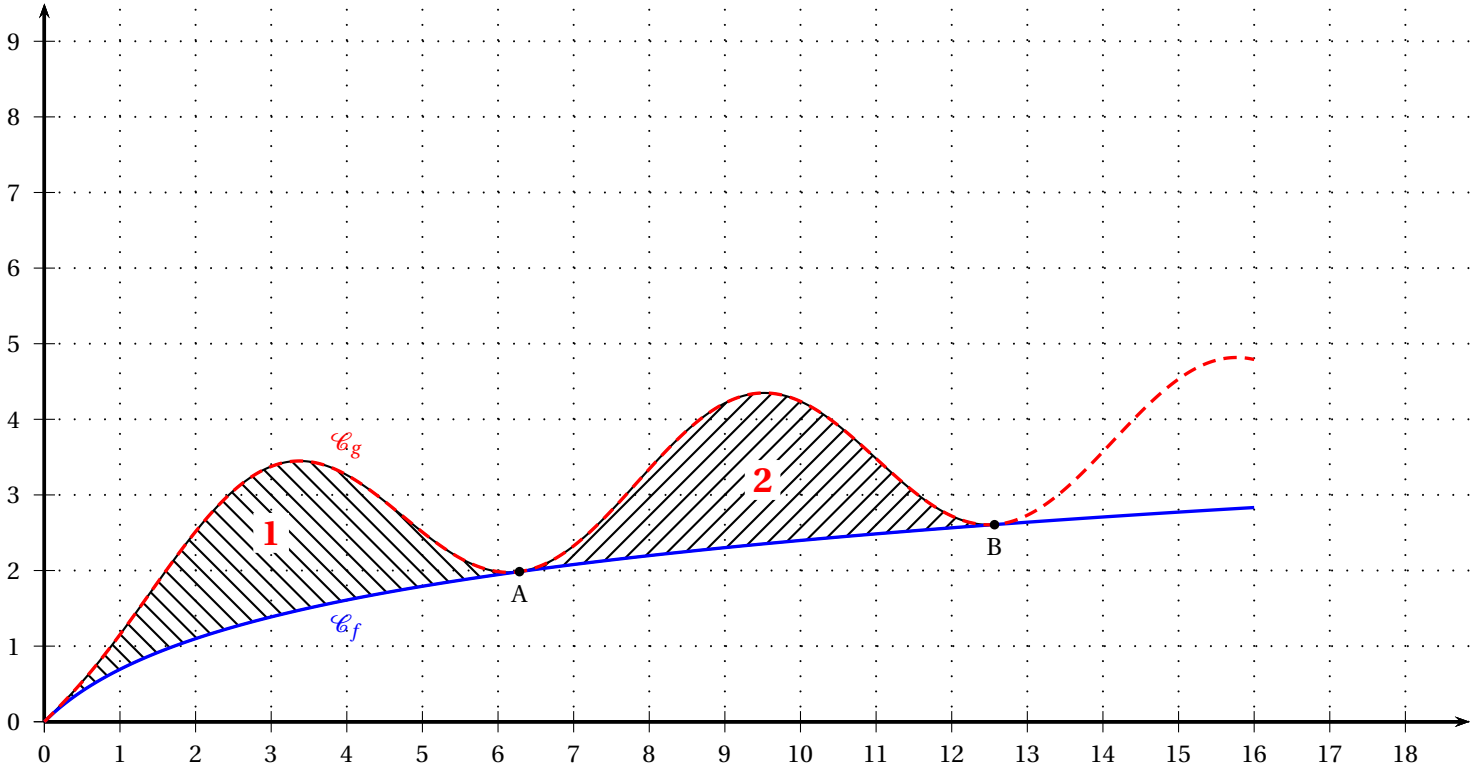
lettre	y	$15y+3$	reste x	lettre
Q	16	243	9	J
J	9	138	8	I
I	8	123	19	T
T	19	288	2	C
C	2	33	7	H
H	7	108	4	E

Donc la lettre Q se décode en E.

Deuxième méthode
On peut utiliser les résultats de la partie **B.**
On doit appliquer 6 fois la fonction $x \longmapsto 15x+3$ successivement au nombre 16 (correspondant à Q), puis à son image, puis à l'image de l'image, etc.
On cherche donc, avec les notations de la partie **B**, le nombre b_6 sachant que $b_0 = 16$.
$b_6 = \left(16 + \dfrac{3}{14}\right) \times 15^6 - \dfrac{3}{14} = 184\,690\,848$
Le reste de la division de 184 690 848 par 26 est 4 qui correspond bien à E.

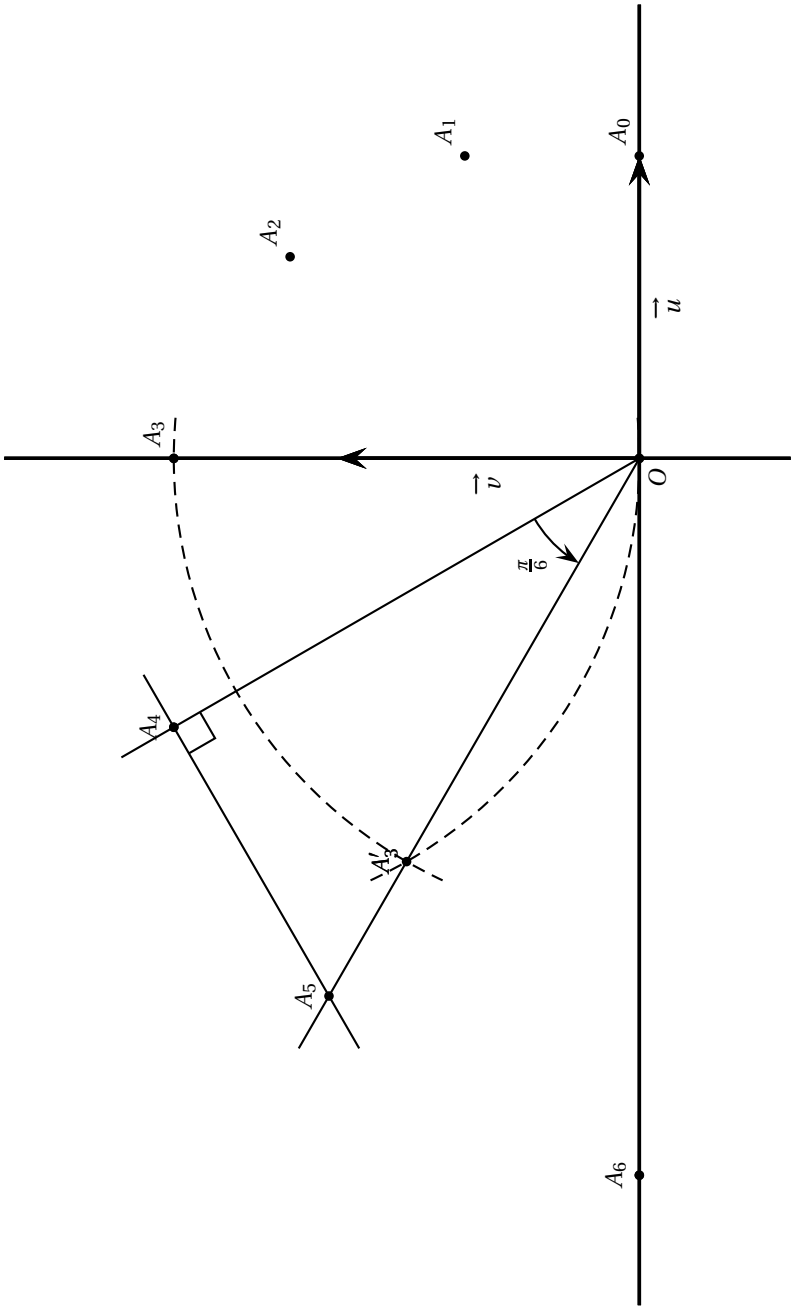
Remarque
*Le mot IYYQ se décode en CODE par le processus détaillé dans la partie **C**.*

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 4


A_3
A_4
A_5
A_2
A_1
A_0
A_6
A'_3
$\frac{\pi}{6}$
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$

Retour à la liste des corrigés