Baccalauréat C juin 1990 Groupement interacadémique II

EXERCICE

Dans le plan orienté, on considère deux triangles équilatéraux ADB et ACE ayant le sommet A commun.
On suppose que AB=AC et que les angles orientés $\left(\overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ ont pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
Faire une figure en prenant AB = 4 cm et, par exemple, $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
On note O le milieu de [BC], I et J les milieux respectifs de [AD] et [AB].
Tracer le triangle OJI sur la figure.
On se propose de démontrer par deux méthodes que le triangle OJI est équilatéral.

Première méthode : composition de similitudes directes.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s de centre C telle que $s(\text{J}) = \text{A}$.
   Placer sur la figure l'image K de O par s.
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s' de centre B telle que $s'(\text{A}) = \text{I}$.
   Déterminer l'image de K par s'.
3. Soit $r = s' \circ s$.
   Démontrer que r est une rotation de centre O et préciser son angle.
4. Démontrer que le triangle OJI est équilatéral.

Deuxième méthode : utilisation d'une rotation vectorielle.

1. Démontrer que $2\overrightarrow{\text{OJ}} = \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{CE}}$
   et que $2\overrightarrow{\text{OE}} = \overrightarrow{\text{BD}} + \overrightarrow{\text{CA}}$.
2. Soit R la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
   Démontrer que $R\left(\overrightarrow{\text{OJ}}\right) = \overrightarrow{\text{OI}}$ et conclure.