Baccalauréat Israël juin 1959
Série mathématiques et mathématiques et technique

I

1er sujet

Dérivée par rapport à x de la fonction $y = \sin(ax+b)$, où a est un nombre algébrique quelconque, x et b des arcs mesurés en radians.

2e sujet

Montrer que, dans le plan, le produit d'une translation et d'une rotation est une rotation.
Déterminer le centre et l'angle de la rotation produit.

3e sujet

Définition de l'inversion dans le plan.
Inverse d'une droite, inverse d'un cercle.

II

On appelle (T) tout triangle ABC dont deux sommets B et C sont donnés fixes et les angles B et C tels que

$$\widehat{\mathrm{B}} - \widehat{\mathrm{C}} = \alpha,$$

α est un angle donné, positif, inférieur à π.
On pose BC $= a$.

A. On se propose de calculer les angles d'un triangle (T) dont on connaît la longueur m de la médiane issue de A.

1. Si l'on pose $\cos \mathrm{A} = u$, montrer que u est racine de l'équation du second degré

$$(1) \quad f(u) = \left(\frac{2m^2}{a^2} + \frac{1}{2}\right)u^2 + \cos\alpha\, u + \frac{1}{2} - \frac{2m^2}{a^2} = 0.$$

2. Montrer que, à toute racine u_0 de l'équation (1) vérifiant

$$-\cos\alpha < u_0 < 1,$$

correspond un triangle (T) et un seul, satisfaisant les conditions du problème.

3. Discuter le problème, en indiquant, suivant les valeurs du rapport $\dfrac{m^2}{a^2}$ le nombre de solutions du problème.

B. Le cercle circonscrit à un triangle (T) coupe la médiatrice de BC en deux points, I et J.
Montrer que les droites AI et AJ conservent des directions fixes quel que soit le triangle (T) considéré.
Démontrer que le lieu géométrique des sommets A de (T) est un arc d'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les parallèles à AI et AJ menées par le milieu O de BC.

N. B. Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.
On n'envisagera que des triangles (T) situés dans un demi-plan limité par BC.