∽ Israël juin 1962 ∽

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

On considère la famille des triangles ABC dont les côtés, $a = 1$, $b = m$, $c = m^2$, sont en progression géométrique croissante.
Dans quel ensemble faut-il choisir m pour que de tels triangles existent ?
Calculer cos A, cos B, cos C.
Pour quelles valeurs de m obtient-on des triangles rectangles ?
Calculer, dans le cas du triangle rectangle, les deux autres angles, en degrés, minutes et secondes (calcul logarithmique) ; préciser l'approximation des résultats.

II

On donne un système d'axes orthonormé, $x'\text{O}z$, $y'\text{O}y$; soit A l'extrémité du vecteur unitaire sur l'axe des x.
On considère la transformation ponctuelle (T) qui, à un point P du plan, fait correspondre le point M par la construction suivante : P se projette orthogonalement en H sur $y'y$; M est l'intersection de la droite AP avec la parallèle à AH menée par O.

1. Le point M est-il bien défini pour tout point P du plan ?
   On considère l'intersection, I, de la droite AP avec $y'y$.
   Montrer que M et P se correspondent dans une inversion de pôle I et do puissance IA^2.
   Comment faut-il modifier cette conclusion lorsque I n'existe pas ?
   Montrer que cette nouvelle détermination du point M est équivalente à la construction initiale, lorsque P n'est pas sur $x'x$.
   Peut-on, dans un langage conventionnel, définir le transformé d'un point situé sur $y'y$?
2. On désigne par $(x\,;\ y)$ les coordonnées de P, par $(X\,;\ Y)$ celles de M.
   Établir les relations qui déterminent x et y en fonction de X et Y, puis celles qui donnent X et Y en fonction de x et y.

Les deux questions suivantes pourront être traitées, au choix, par la géométrie ou par le calcul.

3. Démontrer que (T) transforme une droite (U) en une droite (V).
   Donner une détermination géométrique simple de (V) lorsque (U) est donnée.
4. Démontrer que (T) transforme un cercle (K), de centre A et de rayon k (k positif), en une conique, (C), dont on discutera le genre, suivant les valeurs de k.
   Mettre en place les foyers, les sommets et les asymptotes de la conique correspondant à $k = \sqrt{2}$.