Israël juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

On donne la fonction de la variable réelle x, définie par

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x - \lambda \cos 4x,$$

où λ est un paramètre réel.

1. Calculer sa dérivée ; vérifier que, pour $\lambda = \dfrac{3}{8}$, y a une valeur constante, que l'on calculera.
2. Calculer la valeur de la somme

$$S = \cos^6 X + \cos^6\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{2\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{3\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{4\pi}{6}\right) + \cos^6\left(x + \frac{5\pi}{6}\right).$$

EXERCICE 2

On donne, dans un plan, une droite (D) et un cercle (C) dont le centre est O et le rayon R.
Par un point M du plan, non situé sur (D), il passe un cercle (Γ) du faisceau linéaire défini par (C) et (D) ; on appelle ω le centre de (Γ), H la projection orthogonale de M sur (D).

1. Calculer la puissance, p, de M par rapport au cercle (C), en fonction des données $\overline{HM}$ et $\overline{\mathrm{O}\omega}$, ces deux mesures algébriques étant prises sur un même axe $x'x$ perpendiculaire à (D).
2. Reconnaître, suivant la position relative de (C) et (D), l'ensemble des points I du plan, pôles des inversions qui transforment le cercle (C) et la droite (D) en deux cercles égaux.

EXERCICE 3

Les lettres minuscules utilisées dans l'énoncé désignent des réels, a et b sont fixes et distincts, λ et μ sont deux paramètres.

1. On envisage l'ensemble (E) des polynômes de la forme

$$(1) \qquad \lambda(x-a)^2 + \mu(x-b)^2.$$

   a. Quelle relation doit-il exister entre les coefficients u, v, w pour que le polynôme donné $ux^2 - 2vx + w$ appartienne à (E) ?
   Quand il en est ainsi, calculer λ et μ au moyen de u et v.

   b. Vérifier que le polynôme $x^2 - ab$ appartient à (E) ; en donner l'expression sous la forme (1).

2. On envisage la fonction définie par

$$y = \frac{(b-a)\left(x^2 - ab\right)}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

   Calculer sa dérivée ; étudier sa variation, *en se bornant aux deux cas suivants* :

   a. $a = -1$, $b = 8$;

   b. $a = 1$, $b = 8$.

Tracer les deux courbes représentatives, le repère étant orthonormé.

3. Un plan (Q) est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; A$(a~;~0)$ et B$(-a~;~0)$ sont deux points fixes de ce plan, a donné strictement positif.

Un plan (K) est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$. À chaque point $L(\lambda~;~\mu)$ du plan (K) on associe l'ensemble, (Γ), des points $M(x~;~y)$ du plan (Q) tels que

$$y^2 = \lambda(x-a)^2 + \mu(x+a)^2.$$

a. Où le point L doit-il se trouver pour que l'ensemble (Γ) associé :

- ne contienne aucun point M ;
- soit un cercle (C) ? Il y a une famille $\mathscr{C}$ de tels cercles, former leur équation en fonction d'un paramètre e reconnaître géométriquement la famille $\mathscr{C}$;
- soit une parabole (P) ? Il y a une famille $\mathscr{P}$ de telles paraboles, former leur équation en fonction d'un paramètre et reconnaître géométriquement la famille $\mathscr{P}$.

b. On donne un point $M_0\left(x_0~;~y_0\right)$ du plan (Q) ; on suppose $x_0 y_0 \neq 0$. Par le point M_0, il passe un cercle (C_0) de la famille $\mathscr{C}$ et une parabole (P_0) de la famille $\mathscr{P}$; (C_0) et (P_0) se coupent en M_0 eL en $M'\left(x_0~;~-y_0\right)$ d'une part, en $M_1\left(x_1~;~y_1\right)$ et en $M'_1\left(x_1~;~-y_1\right)$ d'autre part ; calculer x_1 et y_1 en fonction de x_0 et y_0.

Vérifier que l'une des deux droites M_0M_1 et $M_0M'_1$ passe par A et l'autre par B.