Baccalauréat Istanbul juin 1947
série mathématiques

I. 1er sujet

Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre m, le système de deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2mx+(m+1)y & = & 2,\\ (m+2)x+(2m+1)y & = & m+2.\end{array}\right.$$

I. 2e sujet

Mouvement propre apparent du Soleil sur la sphère céleste.
Écliptique.
Année tropique et année sidérale.

I. 3e sujet

Calculer les angles A, B, C d'un triangle, connaissant ses trois côtés a, b, c.
Application numérique : $a = 41\,630,\ b = 47\,113,\ c = 56\,372$.

II.

Soient deux cercles fixes (C) et ($\mathrm{C_1}$) ayant pour centres d'homothétie S et S$'$.
On sait que ces deux cercles se correspondent dans une inversion $\mathcal{T}$ de pôle S et dans une inversion $\mathcal{T}'$ de pôle S$'$.
Soient M et $\mathrm{M_1}$ des points se correspondant dans l'inversion et appartenant respectivement à (C) et à ($\mathrm{C_1}$). Désignons par M$'$ et $\mathrm{M_1'}$ les points qui sont les transformés de M et $\mathrm{M_1}$ dans l'inversion $\mathcal{T}'$.

1. Montrer que la tangente à (C) en M et la tangente à ($\mathrm{C_1}$) en $\mathrm{M_1}$ se coupent en un point I tel que $\mathrm{IM} = \mathrm{IM_1}$.
   Quel est le lieu du point I lorsque M varie ?
2. Établir que la tangente à (C) en $\mathrm{M_1'}$ et la tangente à ($\mathrm{C_1}$) en M' passent par le point I.
   Les quatre points M, M$'$, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_1'}$ sont sur un même cercle (Γ).
   Montrer que les cercles (Γ), lorsque M varie, forment un faisceau.
3. Démontrer que S et S$'$ sont conjugués harmoniques par rapport à tous les cercles (Γ).
   En déduire que le cercle ($\mathrm{C_2}$) de diamètre SS$'$ et les cercles (C) et ($\mathrm{C_1}$) appartiennent à un même faisceau.
4. On représente par O, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ les centres et par r, r_1, r_2 les rayons des cercles (C), ($\mathrm{C_1}$), ($\mathrm{C_2}$).
   Montrer que le cercle ($\mathrm{C_2}$) est le lieu des points Q satisfaisant à $\dfrac{\mathrm{QO_1}}{\mathrm{QO}} = \dfrac{r_1}{r}$ et que l'on a $\dfrac{\overline{\mathrm{O_2O_1}}}{\overline{\mathrm{O_2O}}} = \dfrac{r_1^2}{r^2}$.
5. On suppose maintenant que le faisceau des cercles (C) et ($\mathrm{C_1}$) a des points de Poncelet (ou points limites) et l'on désigne ceux-ci par P et P$'$.
   Montrer que dans ces conditions

$$\frac{\overline{\mathrm{O_2P}}}{\overline{\mathrm{O_2P'}}} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP'}}} \times \frac{\overline{\mathrm{O_1P}}}{\overline{\mathrm{O_1P'}}}.$$

Question facultative : la construction qui faisait passer de (C) et (C_1) à (C2) fait passer de (C_1) et (C2) à un nouveau cercle (C_3), puis de (C_2) et (C_3) à (C_4), etc.
Désignons par O_n le centre du cercle (C_n) et posons

$$x_n = \log \frac{\overline{O_nP}}{\overline{O_nP'}}.$$

Calculer x_{n+2}, connaissant x_n et x_{n+1}.
Montrer que

$$x_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

où λ et μ sont des constantes convenables, dépendant de x_0 et x_1.
En déduire ce que devient le point O_n lorsque n augmente indéfiniment.