Baccalauréat Mathématiques Istanbul juin 1955

I.
1er sujet

Intersection d'une droite et d'une hyperbole : construction, discussion.

I.
2e sujet

Figure inverse d'un cercle dont le plan ne passe pas par le pôle ?
Préciser le plan de la figure inverse et la position de son centre.
À quelle condition (nécessaire et suffisante) deux cercles de l'espace peuvent-ils être considérés comme inverses l'un de l'autre ?

I.
3e sujet

Étudier, dans un plan, le produit de deux homothéties de centres différents.
Lorsque ce produit est une homothétie, on demande de définir son centre et son rapport à partir des homothéties composantes.

II.

On donne une parabole (P), de foyer F, de directrice D, de tangente au sommet T. On désignera dans ce problème, par r Q le cercle de centre Q tangent à la droite T.

1. M étant un point quelconque de (P), démontrer que les cercles Γ_{F} et Γ_{M} sont tangents.
   Montrer qu'il existe une parabole et une seule passant par M et F et admettant T pour directrice ; soit Φ_{M} cette parabole.
2. Montrer que Φ_{M} et (P) sont tangentes en M.
   Quel est le lieu du foyer Φ de Φ_{M} lorsque M décrit (P) ?
3. On considère les paraboles Φ_{M} et $\Phi_{\text{M}'}$ associées à une corde focale MM$'$ de (P). Les tangentes en M et M$'$ à (P) se coupent en W ; celles en M et F à Φ_{M} se coupent en R et celles en M$'$ et F à Φ_{M} se coupent en R$'$.
   Démontrer que le quadrilatère WRFR$'$ est un rectangle.
   Les paraboles Φ_{M} et $\Phi_{\text{M}'}$ se recoupent en un second point, V, différent de F ; construire V.
   Montrer que V se projette sur D au point, K, où MM$'$ coupe D ; en déduire que V est le milieu de la corde focale, NN$'$, de (P), qui est perpendiculaire à MM' (on pourra utiliser le milieu de FV).
   Démontrer que F a une puissance constante par rapport à Γ_{V} ; en déduire que Γ_{V} est tangent à un cercle (Ψ), que l'on construira.
   Montrer que le lieu de V est une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice.
   Lieu du milieu des cordes focales d'une parabole ?
4. Démontrer que le quadrangle MM$'$RR$'$ est inscriptible ; on désigne par Ω le centre du cercle circonscrit, par U, m, m', I les milieux respectifs des segments MM$'$, FM, FM$'$, FW.
   Démontrer que $\overrightarrow{\text{I}\Omega} = \overrightarrow{\text{WU}}$.
   S étant le sommet de (P) on transforme Ω en Ω' par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{FS}}$; démontrer que Ω' est l'homologue de U dans une affinité d'axe FS et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
   En choisissant des axes d'origine F, chercher le lieu de Ω' ; en déduire celui de Ω (on précisera le sommet et le paramètre).