∾ Baccalauréat C Istanbul juin 1960 ∾

I. - 1^{er} sujet

Produit de deux homothéties.

I. - 2^{e} sujet

Polaire d'un point par rapport à deux droites.
Application au quadrilatère complet.

I. - 3^{e} sujet

Tangente à une parabole en l'un de ses points : existence et propriétés élémentaires.

II.
AE et DD′ sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (O) de centre O et de rayon R.
On appelle triangle (T) tout triangle ABC, de sommet A, inscrit dans le cercle (O) et dont les côtés BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ vérifient la relation

$$b^2 + c^2 - a^2 = d^2,$$

où d désigne une longueur donnée non nulle.
On appelle M, N, P les milieux respectifs de BC, CA, AB et AA′, BB′, CC′ les hauteurs d'un triangle (T).

1. Montrer que l'angle A est aigu.
   Montrer que l'expression $\text{MA}^2 + \text{MO}^2$ est constante. En déduire que le lieu de M, s'il existe, est un arc de cercle (Γ).
   Quels sont son centre et son rayon ?
   M étant donné sur (Γ), construire le triangle (T) correspondant.
   Déduire de la discussion que la condition d'existence des triangles (T) est $d < 2\text{R}\sqrt{2}$.
   Montrer que le cercle (Γ) coupe le diamètre DD′ en des points T et T′ tels que $\text{OT} = \text{OT}' = \dfrac{d}{2}$.
   En déduire une construction simple de (Γ).

Dans toute la suite du problème on suppose $d = 2\text{R}$.

2. Montrer que l'enveloppe de BC est une demi-ellipse.
   Préciser ses foyers et ses axes.
   Construire les triangles(T), connaissant l'un des sommets B ou C.
   Déduire de la discussion que les sommets B et C ne peuvent décrire tout le cercle (O).
   Construire les positions limites de ces points.
   Construire les triangles (T) rectangles en B ou en C.
3. Lieux des points A′, N et P.
   Montrer que $\overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AC}'} = \overline{\text{AC}} \cdot \overline{\text{AB}'} = 2\text{R}^2$.
   Lieux des points B′ et C′.
   Montrer que les hauteurs BB′ et CC′ enveloppent un arc de parabole (Π).
   Préciser les éléments de (Π).