Baccalauréat Istanbul septembre 1947
série mathématiques et mathématiques et technique

I. 1er SUJET

Théorèmes de Poncelet pour une ellipse.

I. 2e SUJET

Couples de points conjugués harmoniques par rapport à un cercle.
Polaire d'un point par rapport à un cercle.

I. 3e SUJET

Variation et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}.$$

II.

Soient a et b deux entiers supérieurs à l'unité et premiers entre eux.

1. On considère la progression arithmétique

$$1,\ 1 + b,\ 1 + 2b,\ \ldots,\ 1 + (a - 1)b.$$

- **a.** Montrer que la différence de deux termes quelconques de cette progression n'est pas divisible par a.
- **b.** En déduire, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que les restes des divisions par a des termes de la progression sont tous différents.
- **c.** En conclure que l'un de ces restes est égal à zéro et qu'il existe donc un entier x et un seul inférieur à a tel que $1 + bx$ soit divisible par a.

2.
- **a.** À partir de cette dernière propriété, établir qu'on peut trouver, d'une façon et d'une seule, un entier x inférieur à a et un entier y inférieur à b tels que $ay - bx = 1$.
- **b.** De même on peut trouver, d'une façon et d'une seule, un entier x' inférieur à a et un entier y' inférieur à b tels que $bx' - ay' = 1$.
- **c.** Montrer que les fractions $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont irréductibles (tout comme la fraction $\frac{a}{b}$ et que l'on a $\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{x'}{y'}$.
- **d.** Montrer que $a = x + x'$, $b = y + y'$ et que $x'y - xy' = 1$.
- **e.** Déduire de cette dernière propriété que toute fraction $\frac{\lambda}{\mu}$ comprise entre $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ est telle que

$$\lambda > x, \quad \lambda > x', \quad \mu > y, \quad \mu > y'.$$

N. B. - Coefficients : cours : 10 ; problème : 4, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3.