Baccalauréat Mathématiques Istanbul septembre 1955

I.
1er sujet

Définition de la dérivée d'une fonction $f(x)$ pour la valeur x de la variable.
À partir de cette définition calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 3.$$

I.
2e sujet

Variations et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{4x^2}{x^2 + 4x - 12}.$$

Calculer la pente de la tangente à la courbe représentative aux points A$(-2\,;\,?)$ et B$(3\,;\,?)$; dessiner ces deux tangentes sur le graphique.

I.
3e sujet Établir la formule donnant la dérivée en x du quotient de deux fonctions dérivables en x, le dénominateur ne s'annulant pas en x.
Application : Calculer la dérivée de

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

II.
On donne une conique (E) par son foyer F, sa directrice D associée à F et son excentricité $e \neq 1$.
On appelle O le centre de (E) et H le pied de la directrice D sur l'axe focal.
Une corde MM$'$ de (E) passant par F coupe D en I ; les tangentes à (E) en M et M$'$ se coupent en T ; on appelle ω le milieu de MM$'$.
On rappelle aux candidats la propriété suivante : si deux points, α et β, partagent un segment AB dans le même rapport arithmétique k ($k \neq 1$) le milieu de $\alpha\beta$ partage AB dans le rapport algébrique k^2.

1. En utilisant le théorème de Ménélaüs dans le triangle FIH, démontrer que les points T, ω, O sont alignés ; en déduire une construction simple de ω à partir de F, D, O, connaissant le point I.
2. On désigne par W la projection orthogonale de ω sur FH ; déduire de la construction précédente les relations suivantes :

$$\overline{\mathrm{W}\omega}^2 = -\frac{\overline{\mathrm{HF}}}{\overline{\mathrm{HO}}} \cdot \overline{\mathrm{WO}} \cdot \overline{\mathrm{WF}} = \left(e^2 - 1\right) \overline{\mathrm{WO}} \cdot \overline{\mathrm{WF}}.$$

3. On désigne par (Γ) le cercle de diamètre MM$'$.
Démontrer que
rayon de $(\Gamma) = e$, distance du centre de (Γ) à D
(question indépendante des précédentes).

4. On désigne par (Σ) le cercle de diamètre FI, par (Φ) le cercle de centre T qui passe par F et enfin par (P) le cercle principal de (E).

   Démontrer que (Σ) est orthogonal aux cercles (Γ), (Φ), (P).

   Montrer que (Γ), (Φ), (P) appartiennent à un même faisceau, dont on précisera la ligne des centres, X, et l'axe radical, Δ.

   Construire X et Δ à partir de F, D, O, connaissant le point I (sans tracer les cercles précédents).
5. En construisant le triangle TOS, dont F est l'orthocentre, démontrer que Δ passe par un point fixe, U, tel que $\overrightarrow{\text{FU}} = \dfrac{e^2}{2}\overrightarrow{\text{FH}}$.

   Montrer que U a une puissance constante par rapport à (Γ), lorsque la corde focale MM$'$ varie ; calculer cette puissance et montrer qu'elle est égale à

   $\left(\dfrac{e^4}{4} - e^2\right)\overrightarrow{\text{HF}}^2$.
6. On suppose maintenant que $e = 2$.

   Dessiner la conique (E), placer les foyers, les sommets, le point U, les asymptotes.

   Démontrer que les cercles (Γ) passent par U, en déduire le lieu (Ω) de ω ; quels sont les sommets de (Ω), son centre, ses foyers ?

   Montrer que (Γ) reste tangent à un cercle fixe.

N. B. - La question **6.** peut être traitée en utilisant les propriétés qui font l'objet des questions **3.** et **5.**, que ces questions aient été résolues ou non.
Il est recommandé eux candidats de faire pour chacune des questions une figure aussi simple et juste que possible.