Baccalauréat série mathématiques Istanbul septembre 1956

I. 1$^{\text{er}}$ sujet

Résoudre l'équation

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2.$$

I. 2$^{\text{e}}$ sujet

Points conjugués par rapport à un cercle.
Polaire d'un point par rapport à un cercle.

I. 3$^{\text{e}}$ sujet

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit égale à une fraction décimale.

Partie A

1. Lieu du foyer F, associé à la directrice (Δ), d'une conique dont on connaît deux points, M_1 et M_2 et la directrice (Δ).
2. Déterminer le foyer F d'une conique dont on connaît la directrice (Δ) associée à F et trois points, M_1, M_2, M_3 (on ne discutera pas).

   Même question si l'on connaît (Δ), M_1 ,M_2 et la tangente au point M_2.

Partie B

On considère toutes les ellipses (E) qui ont une directrice donnée (Δ) et un sommet donné S sur l'axe *non focal* (δ).
On nommera S$'$ la projection de S sur (Δ), (γ) le cercle de diamètre SS$'$, (Γ) le cercle de centre S qui passe par S$'$.

1. Lieu du foyer F des ellipses (E).
2. Déterminer les ellipses (E) qui passent par un point donné M, et, par suite, par son symétrique M$'$ par rapport à (δ).

   Montrer que, si M est sur (Γ), le problème n'a qu'une solution, qu'il en a deux si M est intérieur à (Γ).(On pourra utiliser une inversion de pôle S.)
3. Montrer que, quand M décrit (Γ), F ne décrit qu'un arc de (γ).

   En conclure que les ellipses (E) se partagent en deux groupes : les (E_1), qui ont avec (Γ) deux points communs, et les (E_2), qui n'ont avec (Γ) aucun point commun.

   Entre quelles limites varient les excentricités des (E_1) et celles des (E_2) ?
4. Montrer que, par tout point M intérieur à (Γ), il passe au moins une ellipse du groupe (E_1).