

# JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. GÉRARDMER 3-6 novembre 1999

## JM02

### MATHÉMATIQUES ET FABRICATION :

*interaction entre la modélisation mathématique et l'usinage des surfaces complexes. Réflexions autour des cyclides de Dupin.*

Jean-Luc Bauchat

#### *Résumé*

Cette communication présente trois études de réalisation de formes complexes qui montrent l'importance d'une bonne connaissance du procédé de fabrication pour parvenir à une certaine optimisation de la modélisation mathématique nécessaire au pilotage de l'outil de fabrication. En particulier, une réflexion approfondie autour de raccordements géométriques G1 entre objets simples grâce aux cyclides de Dupin illustre l'importance pour le réalisateur de disposer de bons modèles et surtout de bien les utiliser compte-tenu du procédé de fabrication retenu.

## 1. Introduction

En 1989 nous avons fondé au centre Ensam de Lille une équipe pluridisciplinaire destinée à rassembler diverses compétences autour de la réalisation d'objets complexes. Ce groupe, dénommé LCRMAO (Laboratoire de conception et de réalisation mécaniques assistées par ordinateur) réunit des informaticiens, des concepteurs, des mathématiciens, des fabricants et des spécialistes de métrologie. Toute son action est placée dans une perspective motivante de pédagogie et de recherche intégrées et elle se poursuit actuellement dans l'équipe Ingénierie de Fabrication au Centre Ensam de Metz. La communication présente plusieurs exemples qui ont amené le groupe à approfondir sa réflexion autour des modèles mathématiques ([1;5]), à étudier l'interaction entre la modélisation mathématique et la réalisation des surfaces complexes : une bonne connaissance de l'outil, de la machine et aussi des fonctions attendues sur l'objet fabriqué est importante pour bien concevoir et utiliser au mieux la géométrie de la modélisation. Quatre exemples seront étudiés maintenant

## 2. Réalisation d'une prothèse de hanche "morpho-adaptée"

A partir de  $N$  coupes du canal médullaire, vectorisées en amont, il s'agit de réaliser en usinage cinq axes, une prothèse individualisée et parfaitement adaptée au patient. Chacune des coupes  $C_{ij}, 1 \leq j \leq N$  est donnée par  $K$  points numérotés a priori,  $M_{ij}, 1 \leq i \leq K; 1 \leq j \leq N$ . A partir de ce fichier (fig. 1) un modèle fondé sur les splines cubiques ([6]) a été retenu pour la modélisation géométrique (le choix du degré est libre et des déformations locales sont possibles).

### 2.1 La première tentative :

Les points de définition de la couche  $C_j$  servent de descripteur à une spline  $S_j$  radiale paramétrée entre 0 et 1 et pour chaque  $t$  de  $[0,1]$ , un point  $M_{ij}$  est calculé sur  $S_j$ .

Alors la prothèse de hanche est modélisée de façon filaire par les splines  $L_t$  contrôlées par les points  $M_{ij}, 1 \leq j \leq N$  pour  $t$  parcourant l'intervalle  $[0,1]$ . Cette modélisation est intéressante pour l'objet, car les courbes Bspline se situent dans l'enveloppe convexe de leur descripteur et cette propriété assure la possibilité de



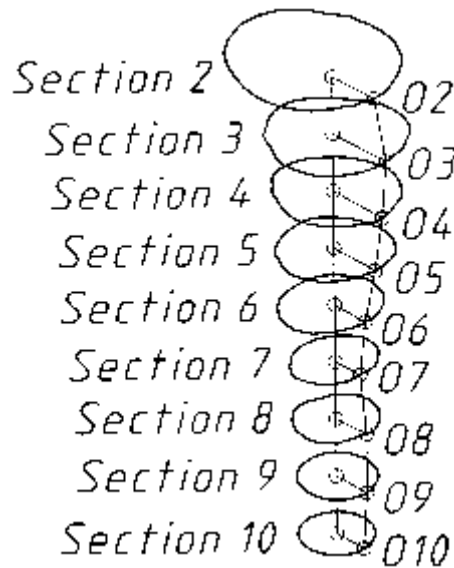


Figure 2 : La réorganisation des données pour obtenir des splines longitudinales planes.

### 3. Réalisation d'un prototype de cavité orbitaire :

Ce travail s'est étalé sur plusieurs années : il est à l'initiative du Professeur B. Devauchelle, responsable du service de chirurgie maxillo-faciale au Centre Hospitalier et Universitaire d'Amiens ([3]). A partir de coupes scanner quasi jointives, il s'agit de reconstruire, en respectant une grande précision, une cavité orbitaire avec comme objectif de mettre à la disposition du praticien une réplique du massif facial sur lequel une opération longue et complexe est envisagée : une préparation minutieuse dans des conditions géométriques exactes est alors possible.

#### 3.1 La première tentative :

Une modélisation par des carreaux de Bézier est mise en place, compte tenu de la disponibilité dans l'établissement du logiciel Euclid fondé sur ce type de surface (cas d'un utilisateur utilisant une boîte noire et incapable de développer des modèles spécifiques et bien adaptés). Ensuite des applications de ce logiciel déterminent des parcours-outils pour la réalisation. La surface obtenue est trop oscillante et de plus la précision requise n'est pas atteinte.

Voulant éviter de modéliser par un trop grand nombre de carreaux, nous sommes arrivés à un modèle qualifié d'académique par le chirurgien demandeur et en outre l'usinage cinq axes n'est pas possible compte tenu de la forme concave de l'objet qui amène des contre-dépouilles.

Comme le montre la figure 3, l'objet a été usiné par une machine à commande numérique 5 axes, en quatre parties ensuite assemblées pour aboutir à une sorte de moule dans lequel une réalisation finale par frittage était envisagée.



Figure 3 : Première réalisation en usinage cinq axes. Les quatre parties sont assemblées.

### 3.2 La seconde tentative :

Après réflexion, il est apparu que des procédés de réalisation par couches apporteraient plus de précision et tiendraient mieux compte des données du scanner et naturellement, nous nous sommes tournés vers le procédé de réalisation par stéréolithographie ([3]). Alors les contraintes de modélisation sont complètement changées : il s'agit de modéliser finement chacune des coupes et de les relier par des surfaces qui ne vrillent pas trop. Ce passage d'un travail 3D à une démarche 2D transforme complètement la démarche de conception.



Figure 4 : Image du crâne d'origine et de la cavité orbitaire obtenue par stéréolithographie.

Les prototypes obtenus ont convaincu la Direction de l'hôpital d'Amiens de financer la reprographie en stéréolithographie du crâne des patients appelés à subir de graves opérations de chirurgie maxillo-faciale.

### 3.3 Conclusion

Dans la dernière décennie, se sont développées des techniques innovantes de réalisation (stéréolithographie, Lam, Laminated objects manufacturing, StratoConception) qui transforment complètement la façon de concevoir la modélisation géométrique.

## 4. Troisième étude : les cyclides de Dupin pour des raccords géométriques G1

### 4-1 Position du problème des surfaces parallèles :

Souvent, pour usiner une surface de paramétrage  $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui, au couple de paramètres  $(u, v)$  associe  $S(u, v)$ , de vecteur normal unitaire  $\overline{N(u, v)}$ , à l'aide d'une fraise hémisphérique de rayon  $R$ , il faut rechercher la surface parallèle donnée par le paramétrage  $T : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par  $T(u, v) = S(u, v) + R \cdot \overline{N(u, v)}$

Or le passage de la surface  $S$ , souvent polynomiale ou rationnelle à la surface  $T$  oblige l'utilisateur à quitter le domaine des surfaces polynomiales ou rationnelles et l'empêche d'utiliser les modèles standards. D'où la recherche de familles  $F$  de surfaces telles que si  $S$  est élément de  $F$ , alors la surface parallèle  $T$  est aussi élément de  $F$ .

Les cyclides de Dupin constituent une telle famille.

### 4-2 Définition et propriété des cyclides de Dupin :

Une cyclide de Dupin est la transformée d'un tore par une inversion quelconque et dans les cas limites, toutes les quadriques sont retrouvées.

C'est une surface rationnelle qui peut se manipuler sous la modélisation (SBR) ([1;5]) et surtout la parallèle à une cyclide de Dupin est encore une cyclide de Dupin.

En 1912 Forsyth a établi les équations paramétriques des cyclides de Dupin :

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{\mu(c - a \cos(u) \cos(v)) + b^2 \cos(u)}{a - c \cos(u) \cos(v)} \\ y(u, v) &= \frac{b \sin(u)(a - \mu \cos(v))}{a - c \cos(u) \cos(v)} \\ z(u, v) &= \frac{b \sin(v)(c \cos(u) - \mu)}{a - c \cos(u) \cos(v)} \end{aligned} \quad , c^2 = a^2 - b^2, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$$

L'exposé montrera la construction dite de Maxwell, indiquant que le paramétrage de la cyclide parallèle à distance  $R$  est obtenu en changeant le paramètre  $\mu$  en  $\mu + R$  ce qui est très aisé. Donc la cyclide parallèle (distante de  $R$ , rayon de l'outil) permet de calculer directement le centre outil qui sera piloté par la machine MOCN en usinage 3 axes.

#### 4-3 L'intérêt des cyclides de Dupin en fabrication :

Les cyclides de Dupin sont loin d'être des objets géométriques académiques : elles possèdent des propriétés si remarquables que deux universités anglo-saxonnes (Cranfield et Michigan-University) les ont choisies comme primitives de CAO ([7;8;9]) En effet les raccordements entre les primitives de la CAO qui se font généralement à partir de surfaces approchées (raccordements évolutifs ou raccordement à rayon constant) sont considérablement améliorés par l'utilisation des cyclides de Dupin. Il suffit de consulter le site WEB de Michigan University pour s'en convaincre.

Nous avons réalisé, au cours de différents projets d'approfondissement, le raccordement géométrique G1 (maintien du plan tangent) entre un cylindre et une sphère, entre deux cônes (figure 6).

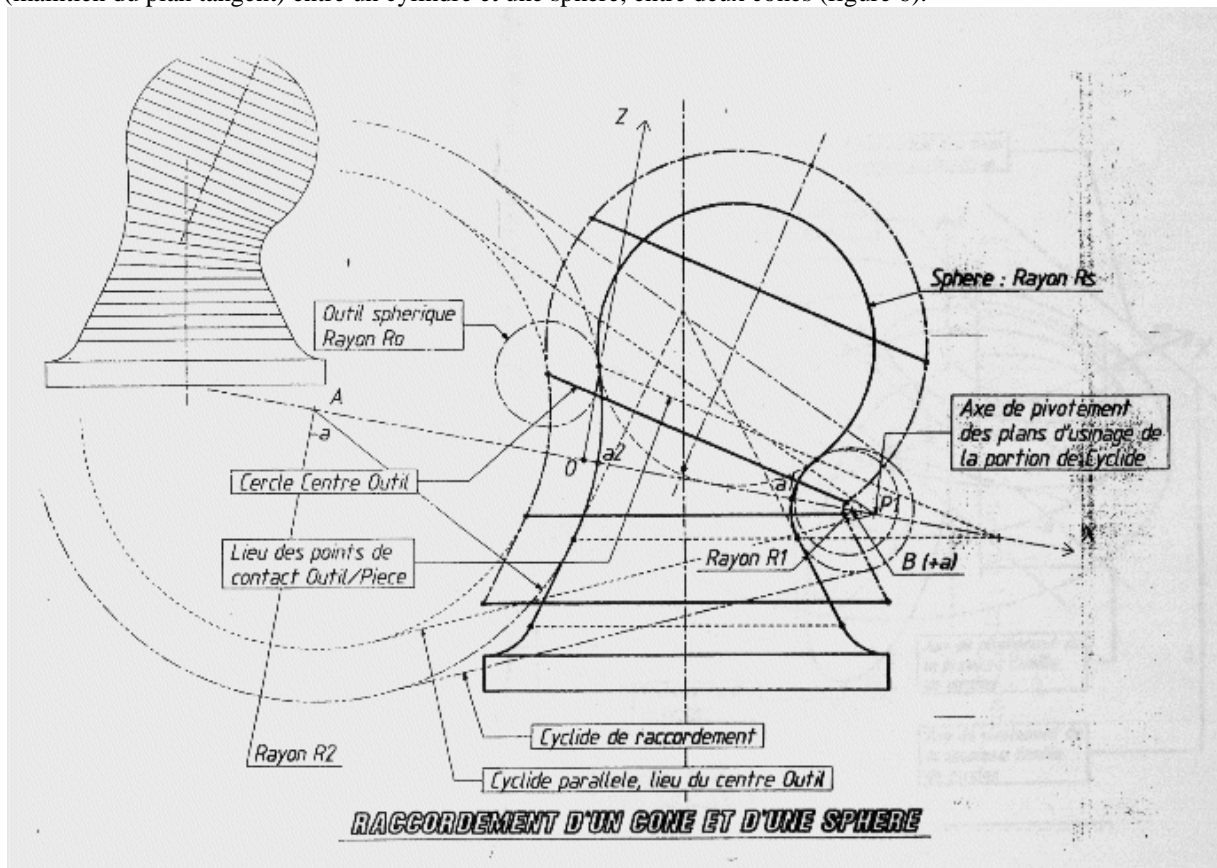


Figure 6 : utilisation des cyclides de Dupin pour les raccordements G1 et aussi observation que la parallèle à une cyclide est encore une cyclide.

Le raccordement entre plan et cylindre, entre deux cylindres quelconques est aussi possible. De ce fait une utilisation des cyclides en chaudronnerie et en fonderie semble prometteuse.

#### 4-4 Première tentative de réalisation :

En pleins travaux sur les surfaces rationnelles ([1]), nous avons d'abord voulu utiliser le modèle rationnel qui découle immédiatement de la paramétrisation de Forsyth. Mais ceci nous a obligés à des changements de paramètres pour modéliser complètement la cyclide et n'a pas donné entière satisfaction.

#### 4-5 Seconde tentative de réalisation :

Comme le montre la figure 7, une cyclide de Dupin possède deux plans de symétrie perpendiculaires dans lesquels figurent quatre cercles principaux (C1), (C2), (C3) et (C4)



Soit D (respectivement D\*) l'axe radical des cercles (C1) et (C2) (respectivement (C3) et (C4)). Alors tout plan du faisceau de cercles de charnière D (resp. D\*) coupe la cyclide suivant deux cercles ayant aussi D (resp. D\*) comme axe radical.

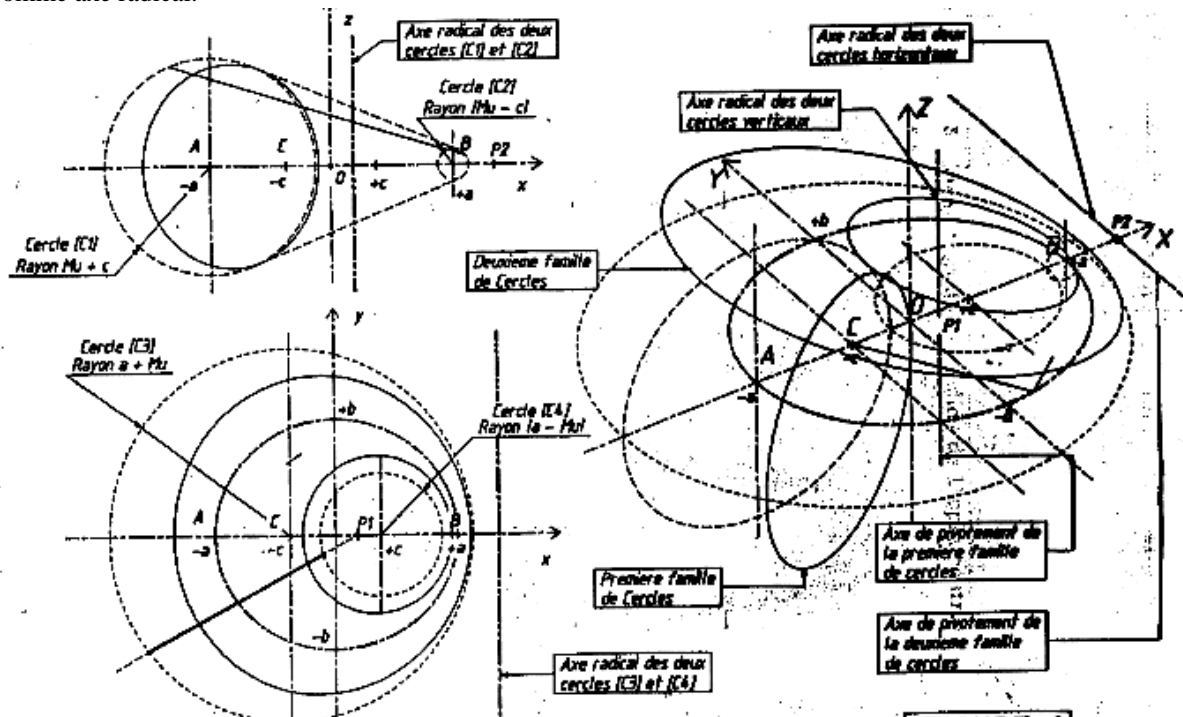


Figure 7 : double génération circulaire des cyclides de Dupin

Cette propriété se met en oeuvre facilement sur MOCN : en effet les ordres G150 (définition d'un plan incliné) et G01, G02 et G03 (génération d'une trajectoire circulaire dans le plan) suffisent pour usiner un arc de cercle dans un plan. De ce fait, les propriétés de double génération circulaire de la cyclide deviennent le point central des techniques de réalisation.

Cette méthode a été testée pour réaliser le raccord entre un cylindre et une sphère dont le centre n'est pas situé sur l'axe du cylindre et aussi pour fabriquer le raccord entre deux cônes.

Figure6 : Double génération circulaire des cyclides de DUPIN

## 5. Conclusion

Nous avons abordé dans nos réflexions des problèmes liés à l'usinage à très grande vitesse : il s'agit de calculer vite, aussi vite que le déplacement des fraises (accélération des vitesses des algorithmes d'intersection de surfaces) et aussi de bien négocier ses virages en concevant des parcours-outil évitant les fortes courbures; Un nouveau problème d'optimisation se pose au concepteur de la géométrie.

Pour finir, remarquons que toute la démarche évoquée suppose une étroite collaboration entre les spécialistes des modèles géométriques, sollicités pour fournir des algorithmes, donner les bonnes propriétés des objets, et les responsables directs de la fabrication qui connaissent bien leurs machines et les processus performants de réalisation. Une synergie entre les deux compétences est indispensable pour optimiser la conception et de ce fait faciliter la réalisation d'où l'importance de mettre en place des équipes d'Ingénierie Intégrée de Fabrication.

Dans la décennie précédente de gros investissements ont été faits autour de la CAO et aujourd'hui le défi consiste à les transférer à la FAO.

Un mathématicien ne saurait terminer cet article sans citer Hervé Laffaye, Directeur du Département MOS (Méthodes d'optimisation et de simulation) à la Direction des Etudes et Recherches d'EDF qui parle dans la dernière revue de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) : " l'optimisation mathématique est un formidable outil de rationalisation des processus de décision. "Nous avons du pain sur la planche dans nos équipes !!!!

Remerciements : Nous remercions Monsieur André Wattellier qui a été associé à certains de nos travaux.

Jean-Luc BAUCHAT  
Equipe Ingénierie de Fabrication  
Centre Ensam de Metz  
4, Rue Augustin Fresnel 57070 Metz-Cedex  
mèl : [jean-luc.bauchat@metz.ensam.fr](mailto:jean-luc.bauchat@metz.ensam.fr)

**Remerciements** : Nous remercions Monsieur André Wattellier qui a été associé à certains de nos travaux.

Références :

- [1] **Bauchat J.L.** — Raccordement géométrique G2 entre surfaces rationnelles mises sous forme (SBR), Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille (1992)
- [2] **Bauchat J.L.**, **David J.M.**, **Defretin A.L.**, **Wattellier A.**, **Caignaert G** — CAD/CAM of complex surfaces : the experience of a pluridisciplinary research team, Computers in Industry 23 49-57 (1993)
- [3] **Bauchat J.L.**, **Wattellier A.** — Raccordement d'une sphère et d'un cylindre à l'aide d'une cyclide de Dupin, Actes IDMMÉ'96 947-951 (1996)
- [4] **Bauchat J.L.**, **Devauchelle B.**, **Wattellier A.** — Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur d'un prototype de cavité orbitaire, Annales de Chirurgie Plastique et Esthétique, Vol 40, N° 1 23-27 (1995).
- [5] **Gibaru O.** — Remplissages Gk continus à N côtés sur des géométries non nécessairement compatibles, Thèse, ENSAM, Spécialité Mathématiques Appliquées, Lille (1997)
- [6] **Léon J.C.** — Modélisation et Construction de Surfaces pour la CFAO, Hermès (1991)
- [7] **Pratt J.M.** — Cyclides in Computer aided design, CAGD, 7, 221-242 (1990)
- [8] **Pratt J.M.** — Cyclides in Computer aided design, CAGD, 12, 131-152 (1995)
- [9] **Srinivas Y.L.**, **Dutta D.** — Intuitive procedure for constructing geometrically complex objects using Cyclides, CAD, vol 26 4, 327-335 (1994)
- [10] **Wattellier A.**, **Bauchat J.L.** — Usinage de Cyclides : Raccordement de Surfaces et portions de Cyclides, Journées AFA Luminy (1997)

Sites Web :

[http://lionel.garnier.neuf.fr/these/Article/04\\_Afig2002.pdf](http://lionel.garnier.neuf.fr/these/Article/04_Afig2002.pdf)  
<http://www.mathcurve.com/surfaces/cyclidedupin/cyclidedupin.shtml>  
<http://lionel.garnier.neuf.fr/these/CD4/CD4.htm>  
[http://images.math.cnrs.fr/spip.php?page=image&id\\_document=618](http://images.math.cnrs.fr/spip.php?page=image&id_document=618)