

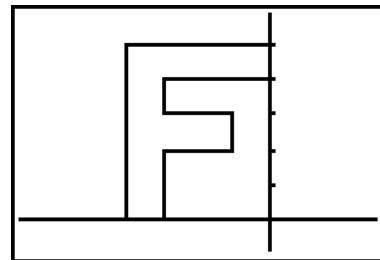
JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. GÉRARDMER 3-6 novembre 1999

Atelier VA04 UTILISATION GÉOMETRIQUE DES TABLEURS-GRAPHEURS DES CALCULATRICES USUELLES Jean-Jacques DAHAN¹

Ce compte rendu se propose de montrer les multiples possibilités pédagogiques offertes par la présence de tableurs intégrés aux calculatrices, bas de gamme ou sophistiquées. On pourra y découvrir des activités pour tous les niveaux, (et aussi pour le niveau du Collège) où tout est à découvrir et mettre au point rapidement afin que l'utilisation des calculatrices graphiques prenne son essor là où elles peuvent et doivent remplacer l'ordinateur trop lourd dans sa manipulation et qui de plus ne contient pas les liens mathématiques que je mets en évidence ici. Les manipulations ont été faites avec une TI-80 et une TI-83 et on a conclu avec la TI-89.

1. DESSIN DE LA LETTRE " F " (comme FILOU, pour ceux qui connaissent déjà l'auteur)

On crée deux suites de 11 nombres chacune, en créant deux listes représentant les coordonnées de 11 points préalablement sélectionnés sur une feuille de papier quadrillé (liste EF1 : abscisses ; liste EF2 : ordonnées). On fait ensuite représenter le nuage de points après deux réglages de cadrages : ZoomStat puis Zsquare pour visualiser tous les points dans un repère orthonormé.



On peut si on veut, cacher les axes, pour obtenir un dessin sur une page blanche (sur TI-83: voir plus loin).

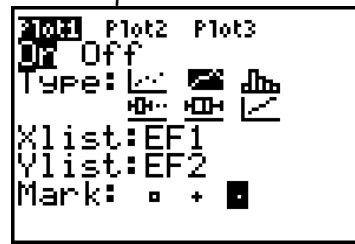
¹ Professeur de Mathématiques au Lycée Raymond Naves à Toulouse
Membre du Groupe Mathématiques et Informatique de L'IREM de Toulouse
Formateur associé à l'IUFM de Toulouse
jjdahan@wanadoo.fr

Voici un aperçu des listes créées :

EF1	EF2	III1	5
-4.000	0.000	16.000	
-4.000	5.000	16.000	
0.000	5.000	0.000	
0.000	4.000	0.000	
-3.000	4.000	9.000	
-3.000	3.000	9.000	
-1.000	3.000	1.000	

EF2(1) = 0

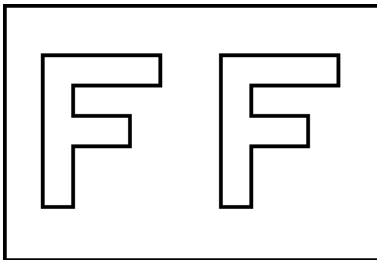
Voici les réglages du graphe statistique sur une TI-83 :



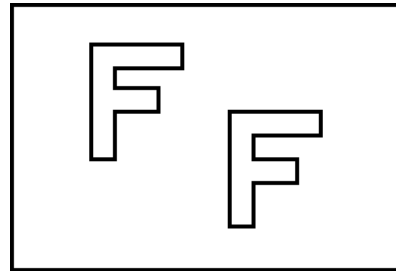
2. NOUVELLES LISTES DÉPENDANTES. NOUVEAUX DESSINS

Translations

On crée $EF3 = EF1 + 6$ et $EF4 = EF2$.
On programme le deuxième nuage ($EF3, EF4$) et on obtient après les mêmes réglages de cadrage :

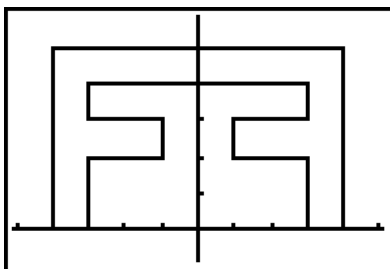


Si cette fois on modifie en :
 $EF3 = EF1 + 6$ et $EF4 = EF2 - 3$, on obtient :

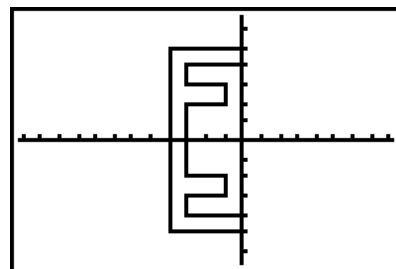


Symétries axiales

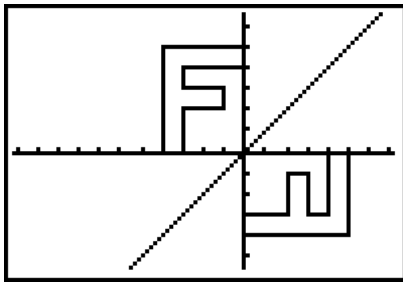
$EF3 = -EF1$ et $EF4 = EF2$:



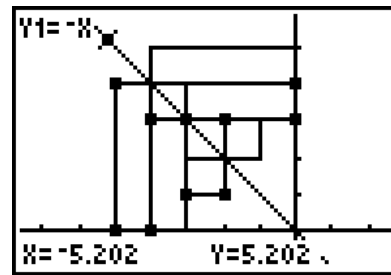
$EF3 = EF1$ et $EF4 = -EF2$:



$$EF3 = EF2 \text{ et } EF4 = EF1 :$$

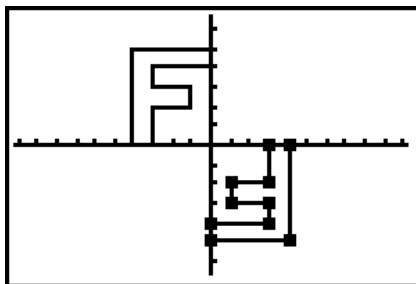


$$EF3 = -EF2 \text{ et } EF4 = -EF1 :$$

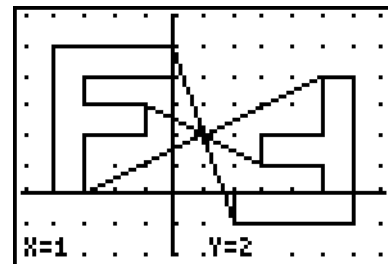


Symétries centrales

$$EF3 = -EF1 \text{ et } EF4 = -EF2 :$$



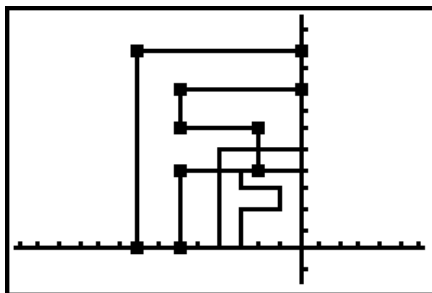
$$EF3 = -EF1 + 2 \text{ et } EF4 = -EF2 + 4 :$$



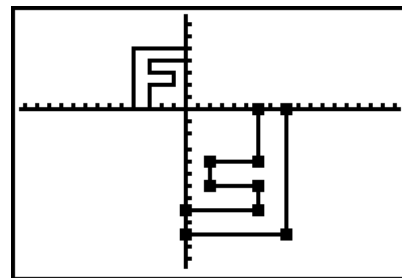
Ces dernières constructions peuvent vous faire conjecturer qu'on a affaire à une symétrie centrale de centre $I(1,2)$. Ceci est facile à prouver (formule du milieu)

Homothéties

$$EF3 = 2 EF1 \text{ et } EF4 = 2EF2 :$$

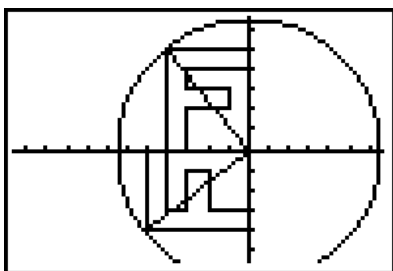


$$EF3 = -2 EF1 \text{ et } EF4 = -2EF2 :$$



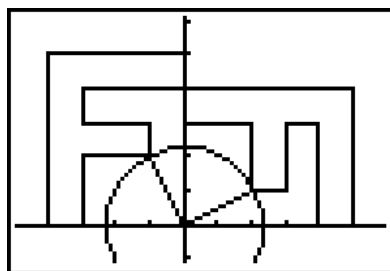
Rotations

$$EF3 = -EF2 \text{ et } EF4 = EF1 :$$



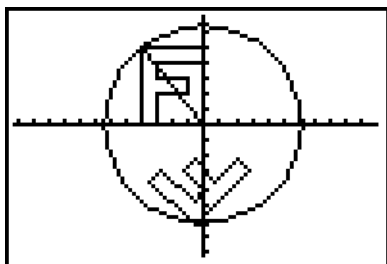
Ici on conjecture que la transformation est une rotation d'angle droit positif.

$$EF3 = EF2 \text{ et } EF4 = -EF1 :$$



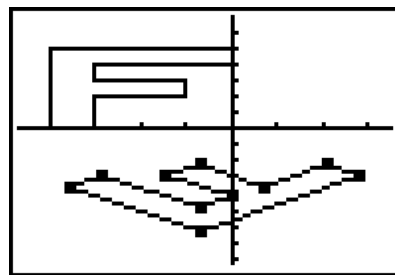
Là on conjecture que la transformation est une rotation d'angle droit négatif.

$$EF3 = (-EF1 - EF2)/\sqrt{2} \text{ et} \\ EF4 = (EF1 - EF2)/\sqrt{2} :$$



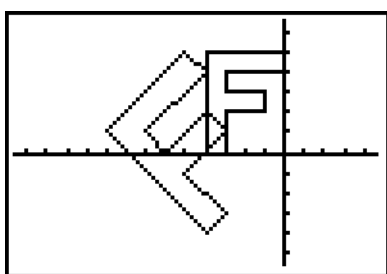
Là il s'agit d'une rotation d'angle $3\pi/4$

Voici ce qu'on aurait obtenu si on n'avait pas rendu le repère orthonormé :

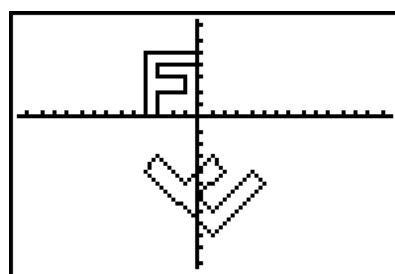


Similitudes

$$EF3 = (EF1 - EF2) \text{ et } EF4 = (EF1 + EF2) :$$

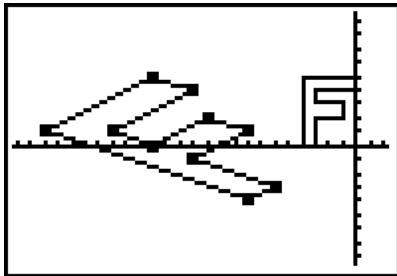


$$EF3 = (EF1 + EF2) \text{ et } EF4 = (EF1 - EF2) :$$

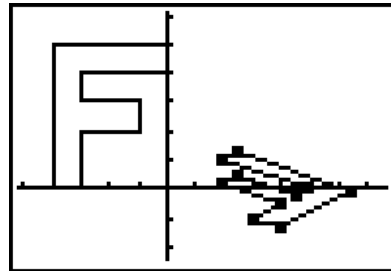


Applications affines

$$\begin{aligned} EF3 &= 2.EF1 - 3.EF2 \text{ et} \\ EF4 &= EF1 + EF2 \text{ donnent :} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} EF3 &= -EF1 + (1/2).EF2 \text{ et} \\ EF4 &= (1/3).EF1 + (1/4).EF2 \text{ donnent :} \end{aligned}$$



Conclusion : il est donc possible de visualiser une famille finie de points donnés par leurs coordonnées mais aussi la famille de leurs images par une application du plan à condition que celle-ci soit définie analytiquement.

Remarque : il est possible de dynamiser ces images avec un petit programme de dessin animé qui fera défiler devant nous des images préalablement enregistrées (par exemple, les translatés de la lettre F par des translations de vecteurs successifs permettant de voir se translater cette lettre sur l'écran). [Voir Appendice 1.](#)

3. TRACÉS DE COURBES PARAMÉTRÉES

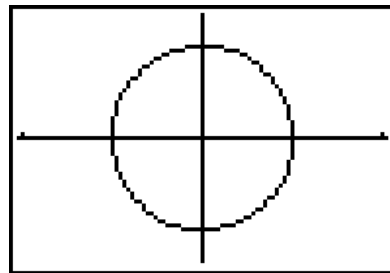
Cercle

On crée 3 listes, les deux dernières dépendant de la première :

Liste ANG = seq (X,X,0,360,5)

Liste CE1 = cos(LANG°)

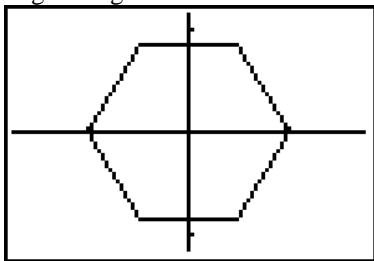
Liste CE2 = sin(LANG°)



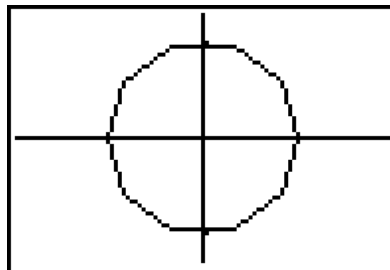
Polygones réguliers

Si on programme cette fois pour :

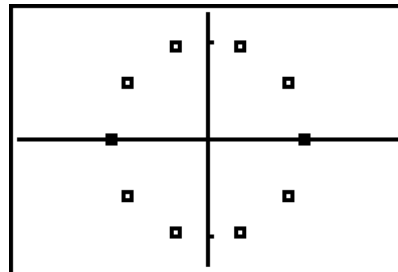
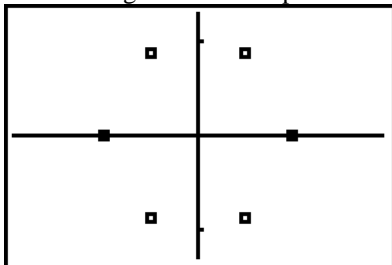
Liste ANG = seq (X,X,0,360,60), on obtient un hexagone régulier :



Avec un pas de 36°, on obtient un polygone régulier qui est presque confondu avec son cercle circonscrit :



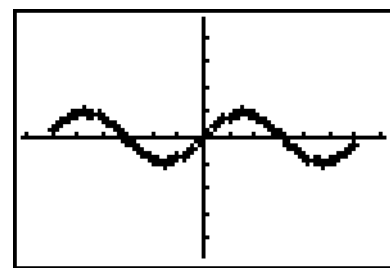
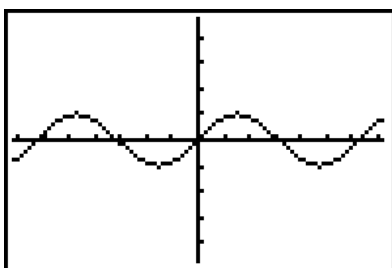
Voici les mêmes nuages en mode “ points non reliés ”



4. DETERMINATION GRAPHIQUE DE L'IMAGE DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Sélection d'un nuage de points de la courbe de notre fonction

Courbe de la fonction $Y1(x)=\sin(x)$



On a programmé le nuage de points (SI1,SI2) où $SI1 = \text{seq}(x,x,-6,6,0.2)$ et $SI2 = Y1(LSI1)$ qui nous donne une partie de notre courbe (toute si on avait choisi les bons paramètres).

Image de cette courbe par une rotation d'angle variable

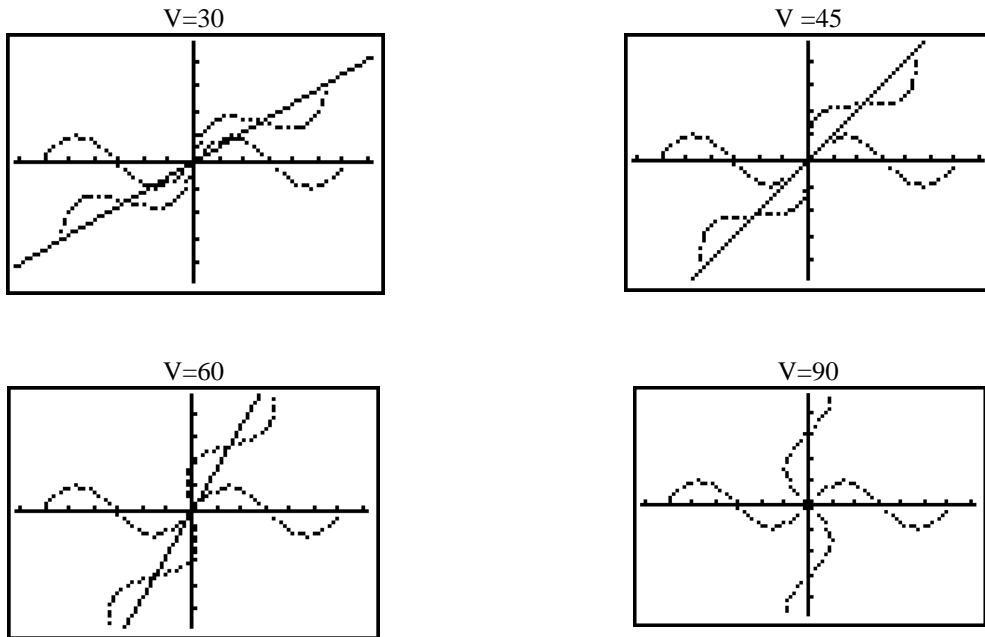
Notons qu'on programme en Y2 : $y_2(x) = \tan(V^\circ) \cdot X$ dont la courbe est l'image de l'axe des abscisses par la rotation de centre o et d'angle V°

Sur l'écran de calcul, on stocke 45 dans V ; le contenu de V pourra être modifié à tout moment.

Ensuite, on crée les deux listes SI3 et SI4 dont le nuage de point donnera, l'image de notre courbe par la rotation d'angle V° , en posant :

$$\begin{aligned} \text{SI3} &= \text{COS}(V^\circ) \cdot \text{SI1} - \text{SIN}(V^\circ) \cdot \text{SI2} \\ \text{SI4} &= \text{SIN}(V^\circ) \cdot \text{SI1} + \text{COS}(V^\circ) \cdot \text{SI2} \end{aligned}$$

Et on obtient



5 EXEMPLE AVEC UNE FONCTION COMPLEXE (TI-89)

Image du cercle de centre A(2,0) et de rayon 2 par la fonction complexe $z \rightarrow \frac{4}{\text{conj}(z)}$

F1-Tools	F2-Algebra	F3-Calc	F4-Other	F5-Pr3mID	F6-Clean Up
Done					
$x + i \cdot y \rightarrow z$ $x + y \cdot i$					
$\frac{4}{\text{conj}(z)}$					
$\frac{4 \cdot x}{x^2 + y^2} + \frac{4 \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot i$					
4/conj(z)					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

F1-Tools	F2-Algebra	F3-Calc	F4-Other	F5-Pr3mID	F6-Clean Up
Done					
$r(x, y)$ $\frac{4 \cdot x}{x^2 + y^2}$					
$i(x, y)$ $\frac{4 \cdot y}{x^2 + y^2}$					
i(x, y)					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30					

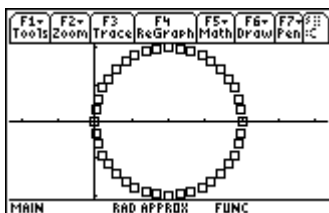
Si V est un entier compris entre 0 et 360 et diviseur de 360, les coordonnées d'un point du cercle en question sont données par :
 $x = 2 \cdot \cos(v) + 2$ et $y = 2 \cdot \sin(v)$

F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell Header	F4-Cell	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
1	9.	4.	0.			
2		3.9754	.31287			
3		3.9021	.61803			
4		3.782	.90798			
c2=seq(2*cos(x°)+2,x,0,360,...						
MAIN RAD APPROX FUNC						

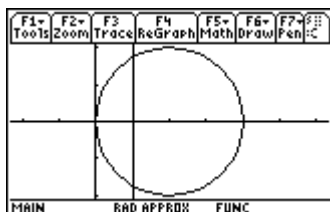
F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell Header	F4-Cell	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
38		3.782	-.908			
39		3.9021	-.618			
40		3.9754	-.3129			
41		4.	...			
c2=...(x°)+2,x,0,360,c1[1])						
MAIN RAD APPROX FUNC						

F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell Header	F4-Cell	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
1	9.	4.	0.			
2		3.9754	.31287			
3		3.9021	.61803			
4		3.782	.90798			
c3=seq(2*sin(x°),x,0,360,...						
MAIN RAD APPROX FUNC						

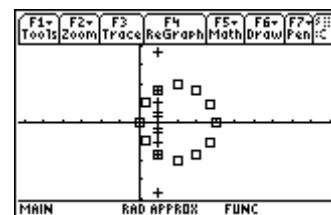
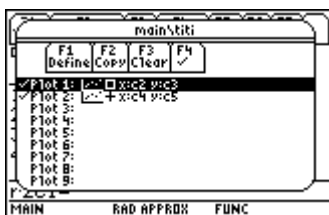
Après programmation du nuage de points et affichage du graphe après un bon cadrage ZoomData et ZoomSqr, on obtient bien le cercle dont on cherche l'image



Nous allons programmer dans c3 et c4 :
 $c4 = r(c2, c3)$
 $c5 = i(c2, c3)$



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plot Setup	Cel1	Header	Calc	Util	Stat
DATA						
	c1	c2	c3			
1	30.	4.	0.			
2		3.7321	1.			
3		3.	1.7321			
4		2.	2.			
	r2c1=					



Conclusion

Le lecteur aura compris que mon propos était de montrer comment on pouvait aborder la géométrie analytique grâce aux calculatrices munies de tableurs ; il aura pu aussi découvrir comment une gestion pertinente de ces tableurs permettait :

1/ d'aborder le côté formel de la géométrie analytique même si la calculatrice utilisée n'était pas dotée de possibilités de calcul formel

2/ De visualiser les transformations élémentaires de la géométrie, que ce soit avant ou après leur étude théorique, avec l'impression de manipuler par moments un logiciel de géométrie que les calculatrices utilisées ne possèdent pas. J'ai néanmoins montré avec Cabri intégré dans la TI-89 grâce à la technologie Flash (non disponible pour le grand public au moment du Congrès mais disponible à l'heure actuelle: possibilité de télécharger les mises à jour, donc les nouveaux logiciels via Internet) comment utiliser les formules analytiques. **Voir Appendice 2.**

Je pense donc avoir présenté une piste d'utilisation des tableurs intégrés aux calculatrices qui permette :

1/De ne pas cantonner l'arrivée de ceux-ci dans les programmes de Collège à une simple manipulation impersonnelle d'un logiciel hors du cadre d'une utilisation en Mathématique.

2/ D'utiliser ceux-ci dans le cadre du Lycée pour orienter l'activité mathématique plus vers la manipulation, vers l'observation, vers le goût de la découverte et le besoin d'asseoir enfin ce travail par des démonstrations " librement consenties "

Appendice 1

Pour simplifier on a rempli les listes L1 et L2 avec les coordonnées de 3 points dont PLOT1 est le graphe statistique avec points reliés. Ce programme permet de visualiser ce graphe et de le translater vers la droite d'une unité à chaque appui de la touche ENTER

```
PROGRAM:DESSAN
:MIN(L1)->XMIN
:MAX(L1)+5->XMAX

:MIN(L2)->YMIN
:MAX(L2)->YMAX
:0->XSEL
:0->YSEL
```

```
PROGRAM:DESSAN
:FOR(X,1,5,1)
:L1+1->L1
:PLOT1(□,L1,L2,
□)
:DISPGRAPH
:PAUSE
:END
```

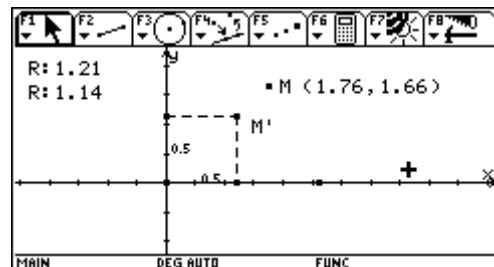
Voici les cinq images qui composent ce dessin animé manuellement



Appendice 2

Étude sur TI-89 ou TI-92 de $z \rightarrow \frac{4}{\text{conj}(z)}$

Les coordonnées de M' ont été calculés avec la calculatrice de Cabri et reportées sur les axes en utilisant les formules: $x' = r(x,y)$ et $y' = i(x,y)$ où $M(x,y)$ et $M'(x',y')$



On a redéfini le point M pour qu'il appartienne à un cercle passant par l'origine et centré sur l'axe des abscisses. L'image de ce cercle par notre inversion est obtenue en demandant le lieu de M' quand M varie sur ce cercle et on obtient là aussi une droite parallèle à l'axe des ordonnées

