



# JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. GÉRARDMER 3-6 novembre 1999

## Atelier VA07 SENS ET ALGORITHMES Annick FLUCKIGER<sup>1</sup> et Loïc MAISONNEUVE<sup>2</sup>

Il s'agissait dans cet atelier de s'interroger sur les conditions d'une compatibilité entre enseignement des algorithmes de calcul d'une part et constitution de sens des connaissances mathématiques d'autre part. Cet atelier a été, après l'exposé d'une recherche de longue durée conduite dans des classes primaires à Genève, l'occasion d'échanges entre les participants et les acteurs de la recherche autour de la problématique liant sens et algorithmes dans l'enseignement primaire.

### **Association "sens-algorithme" : une certaine position du problème des connaissances numériques enseignées**

La question du sens est omniprésente dans l'ensemble des textes - officiels ou non -, discours, prises de position... quand il s'agit de l'enseignement des mathématiques; cette question du sens des connaissances enseignées est à l'origine du développement de la didactique des mathématiques.

La position la plus communément admise est que travailler sur les algorithmes de calcul - prenons la division - à l'école primaire est au plus une nécessité culturelle mais n'est en aucun cas générateur de "sens" pour les élèves; d'autant plus que, maintenant, les calculatrices semblent permettre de se dispenser de cet apprentissage perçu comme sans intérêt pour les apprentissages mathématiques et coûteux en temps. Enfin, il est de bon ton d'associer sens et problème concret sans que, le plus souvent, soit interrogé ce couplage.

Il nous semblait intéressant de questionner toutes ces évidences et de poser le problème en d'autres termes, par exemple, quel "sens" cela peut-il bien avoir de travailler sur des algorithmes de calcul - donc uniquement dans le numérique à l'exclusion de tout énoncé formulé avec des mots - et ce, à la fois du point de vue de l'élève et du point de vue du savoir mathématique de référence.

Les expériences du type "âge du capitaine" et les commentaires très médiatisés qui ont suivi, ont convaincu familles - et enseignants parfois - que l'enseignement des mathématiques se faisait au détriment du sens et même du "bon sens". Heureusement, depuis lors, les travaux faits en didactique des mathématiques et notamment ceux concernant le contrat, ont montré que le problème n'est pas si simple qu'il y paraît et que

---

<sup>1</sup> Assistante, FAPSE, Université de Genève

<sup>2</sup> Enseignant chercheur, Genève

les conclusions simplistes ne sont guère pertinentes rapportées à la complexité des diverses contraintes pesant sur le système didactique.

Partant de l'idée que les problèmes doivent être à l'origine de l'action de l'élève et que celle-ci ne doit pas être initiée par une injonction du maître qui enseignerait des solutions à des problèmes non encore existants pour l'élève, s'est souvent imposée la pratique consistant à introduire une notion nouvelle par le biais de problèmes "concrets". L'idée est que cet ancrage dans le "réel" suffit à donner du sens. Bien sûr il n'en est rien et là encore, les travaux des didacticiens sont là pour nous alerter. C'est ce que fait Bernard Sarrazy dans sa thèse (1996) qui rappelle que dès les années trente des responsables scolaires dénonçaient à la fois un entraînement à la résolution de problèmes-types et, l'existence, lors de la résolution de ces problèmes, d'effets que nous appellerions maintenant des effets de contrat. C'est également ce que fait Guy Brousseau lorsqu'il affirme:

*"On peut prévoir que les efforts déployés pour aider les professeurs à "donner du sens " aux savoirs mathématiques (je m'y suis employé) appelleront des efforts contraires car les limites dans ce domaine ont été largement dépassées. Le sens n'est pas une panacée. Il faut pouvoir s'en débarrasser. La nature même des mathématiques consiste à oublier le sens pour tirer les bénéfices des formalisations et des généralisations." (Brousseau, 1997, p.38).*

Qu'il s'agisse de calcul algébrique ou d'algorithmes, une certaine "perte de sens" est bien en effet au cœur de l'intérêt même de ces connaissances mathématiques. Les algorithmes sont des objets mathématiques incontournables, la réapparition de l'algorithme d'Euclide dans les manuels de collège français suite à l'introduction des nouveaux programmes est là pour rappeler l'importance de l'objet 'algorithme' dans l'architecture mathématique. A propos de l'enseignement des algorithmes de calcul un certain nombre de questions peuvent être posées, par exemple quelle conséquence aurait la suppression de tout enseignement d'un algorithme de division des entiers sur celui de la division des polynômes?

Le choix fait par nous pour cette recherche est d'investir un temps important dans la construction par les élèves d'un algorithme de calcul, exploitant le fait que l'algorithme de la division est l'occasion de retravailler l'ensemble des connaissances numériques à l'œuvre pendant la scolarité primaire. Les algorithmes de calcul écrit, on le sait, sont historiquement et culturellement situés: en particulier ils sont dépendants du système de numération utilisé et peuvent donc être l'occasion de questionner ce système de numération. Une proposition faite, suite à une recherche sur les erreurs des élèves dans les algorithmes de calcul écrit, était de "considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on puisse en retrouver la clé."(Brun et coll., 1994). Ce n'est pas cette proposition que nous avons retenue mais celle qui consiste à essayer de constituer dans la classe une "micro société de recherche", micro société dans laquelle une organisation didactique articulant situations d'action, de communication et de débat de preuve peut permettre, sur le long terme, la constitution d'un répertoire d'algorithmes de division.

Brousseau (Brousseau, 1988) définit le sens d'une connaissance reconnue comme telle par un élève comme étant formé d'un tissu de raisonnements et de preuves, d'un tissu de reformulations et de formalisations, des modèles implicites associés (soit qu'elle les produise soit qu'elle en résulte), des traces de situations-actions qui les fonctionnalisent ou qui les contextualisent, des rapports plus ou moins assumés entre les différentes composantes. Vergnaud (Vergnaud, 1992), quant à lui, affirme que la notion de sens se pose à trois niveaux : que le contenu soit pour l'élève relié à des activités significatives pour lui, que l'élève voit un vrai problème ni trop difficile ni trop facile et que le contenu s'inscrive dans un projet qui ait corps pour lui et qu'il se l'approprie. Ces deux

dispositions combinées à l'idée défendue par Alain Mercier de "redonner à l'élève la liberté par rapport aux algorithmes" servent de trame à la mise en place de notre expérimentation sur les algorithmes de calcul. Cette expérimentation fut conduite dans des classes primaires à Genève à propos de différents algorithmes de calcul écrit.

### **Éléments du récit de l'expérimentation : le point de vue de l'enseignant**

Si le cadre théorique était assez clairement défini (voir plus haut), paradoxalement, il est une difficulté incontournable à la réalisation de toute expérimentation... sa phase pratique! En effet, l'un d'entre nous de par sa double condition de chercheur et d'enseignant se devait d'être clair dans ses actes, ses paroles ou ses interventions sous peine d'influencer l'analyse des résultats. Nous n'entamerons pas ici un débat sur la difficulté de faire cohabiter théoricien et praticien : cependant, si l'exercice peut paraître pour certains, délicat, il est néanmoins possible.

Il ne s'agit pas ici non plus de présenter quelque recette à appliquer et de se dire qu'en reproduisant "cette manière de faire" on permettra à l'élève d'acquérir ce sens qui lui manquait singulièrement...

Ceci étant, comment avons-nous procédé tout au long des séances ? D'une manière générale, nous pouvons dire qu'au niveau de l'enseignement notre attitude était de dire aux élèves "Voilà des divisions (multiplications ou soustractions selon les degrés)... nous n'allons pas vous montrer comment les résoudre... Dites-nous combien ça fait" !

Il est indéniable que les travaux de C. Kamii ont influencé à l'origine, en tant qu'enseignant, notre manière de procéder (activités frontales, opérations posées au tableau, puis après un petit temps de résolution, prise en compte de chaque résultat et explications de toutes les stratégies individuelles, non-validation de la part de l'enseignant mais du groupe, etc.). Très vite nous fûmes étonnés des procédures appliquées. Parfois étonnamment innovatrices, plutôt "bien pensées", parfois étonnamment élémentaires, pour ne pas dire rudimentaires. Ainsi, d'emblée, nous sommes-nous retrouvés face à une diversité de procédures. A ce titre, l'expérience fut (et est encore) riche.

En écoutant les stratégies des autres élèves lors des phases de mise en commun, certains ont progressivement été amenés à se poser de nouvelles questions, sur leur manière d'agir, de commencer, d'aboutir au résultat. Nous nous souvenons – non sans sourire – que dans un premier temps, nous nous étions fixés jusqu'à fin janvier (début de l'activité : octobre) avant de "donner" plus officiellement, et de manière également plus directive, l'algorithme proposé dans la méthodologie et ce pour répondre aux exigences du curriculum. Nous ne l'avons finalement pas fait, tant les situations étaient riches, porteuses et débouchaient toujours sur de nouvelles problématiques, de nouvelles procédures... En fin d'année, plusieurs algorithmes se côtoyaient ...

Nous ajouterons encore que le facteur temps joue ici un rôle prépondérant et il serait illusoire de croire qu'en deux ou trois séquences du type énoncé ci-dessus, les élèves deviennent maîtres dans l'art d'une opération, tant (pour nombre d'entre eux) des notions antérieurement "enseignées" sont encore à construire. Ce qu'ils ont fait d'ailleurs: progresser à été réorganiser les savoirs, les reconstruire, leur redonner... du sens.

## **Sur la base des exposés faits et d'extraits des données recueillies lors des expérimentations : les échanges**

Sommairement et de façon non exhaustive, à partir des exposés faits et des données d'expérience fournies, il a été question dans les échanges :

- du réinvestissement des connaissances antérieurement acquises. L'exemple des "retenues", notamment dans le travail de mise en place par les élèves, de l'algorithme de multiplication, est significatif de certaines généralisations faites à partir d'algorithmes de calcul déjà étudiés ;
- de la participation discontinue d'élèves pour lesquels seule l'observation de ce qu'ils produisent sur une longue durée permet de voir qu'ils sont plus "présents " et actifs qu'il y paraît ;
- de la difficulté pour les élèves de construire un milieu de validation lorsque la recherche concernait l'algorithme de multiplication et ce, bien davantage que lors des recherches à propos des algorithmes de soustraction ou division (ceci du fait du positionnement différent de ces opérations dans l'architecture mathématique) ;
- du fait que l'évaluation de l'ordre de grandeur du produit non seulement n'est pas un point d'appui pour les élèves mais est, au contraire, une notion difficile et à construire dans la durée ;
- du choix fait par les élèves d'utiliser des algorithmes de calcul différenciés, adaptés aux nombres donnés, ceci, lorsque les élèves disposent d'un répertoire d'algorithmes inventés ou découverts ;
- de l'intérêt de l'outil "journal" (voir Sensévy 1996) utilisé pour donner aux élèves la possibilité de moments auto - réflexifs (pour autant que cet outil s'articule avec l'ensemble du dispositif visant à faire de la classe une "micro - société de recherche").

Du débat final nous relèverons les deux points suivants:

- la question soulevée de l'existence possible à la fois d'une vraie activité de l'élève et d'une réelle situation de débat dans une organisation autre que celle du travail dit "de groupe". En effet les données recueillies le montrent, activité de l'élève, situations de communication, et situations de débat de preuve peuvent être mises en place dans un autre fonctionnement que celui habituellement prôné pour les activités dites "de recherche", celui de la confrontation entre groupes.
- l'intérêt des participants de l'atelier pour la question des conditions mises en place pour qu'apparaissent les effets mentionnés ou mis en évidence dans les données communiquées; c'est en effet une question didactique essentielle. Il s'agissait bien pour nous d'affirmer que ce sont les conditions de fonctionnement des connaissances, actualisées dans la mise en place des situations didactiques qui permettent - ou non - que soient élaborées par les élèves des connaissances qui font sens pour eux et qui ont du sens dans le savoir mathématique de référence. Notons pour terminer que notre expérimentation s'inscrit dans des recherches s'appuyant sur la modélisation des situations didactiques proposée par Guy Brousseau dans le cadre de la théorie des

## Références bibliographiques des textes cités

**Brousseau, G.** (1988). Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

**Brousseau, G.** (1997). Eviter les échecs prématurés: quelles conditions? quelles actions? quelles limites? In *Mathématiques de base, pour tous? Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en mathématiques en début de scolarité?* Lyon: Aléas-Editeur.

**Brun, J., Conne, F., Lemoyne, G., & Portugais, J.** (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahiers de la recherche en éducation*, p. 117-132.

**Kamii, C.** (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic 3rd Grade. Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

**Sarrazy, B.** (1996) *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des Arrière -plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux II.

**Sensévy, G.** (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen: Le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 16 n°1, 7-46.

**Vergnaud, G.** (1992). Qu'est-ce que la didactique? En quoi peut-elle intéresser la formation d'adultes peu qualifiés. *Education Permanente*, Vol. n°111, 19-31.