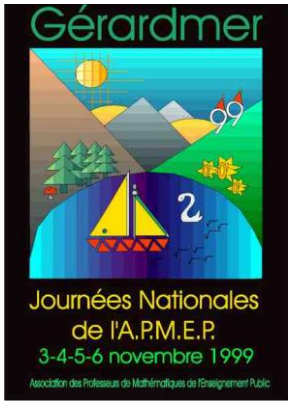


JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P.
GÉRARDMER
3-6 novembre 1999

Atelier VA26
SYRACUSE :
ÉCHAPPER AU VISIONS HABITUELLES DES NATURELS

Marcel Dumont[1]

Rappel du problème :

On construit une suite d'entiers de la façon suivante :

- si un nombre est pair, alors on le divise par 2 pour obtenir le suivant,
- s'il est impair alors on le triple et on ajoute 1 pour obtenir le suivant.

Démontrer que, quel que soit le nombre départ, la suite finit toujours par tomber sur la période 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4 ...

L'Université de Syracuse offre un prix de 10 000 $ au premier qui trouvera ! (carotte pour stimuler les recherches, mais carotte qui risque de bloquer les échanges entre ceux qui aiment les carottes !)

Constats :

- A ce jour, personne n'a rien trouvé, pas même les spécialistes.
- N'importe qui peut chercher.
- Les quelques informations colportées à ce sujet montrent que nous sommes tous prisonniers de notre savoir, de nos habitudes, de nos visions scolaires quand elles sont confortées par une efficacité remontant à plusieurs siècles, voire millénaires.

Conséquence :

C'est une bonne occasion pour se lancer dans l'aventure, et pour ouvrir les horizons à ceux qu'on transforme en robots, à mémoriser et appliquer des formules.

Après avoir dénoncé en vain depuis près de quarante ans les incohérences dont fourmillent les rudiments de mathématiques qu'on enseigne et qu'on appelle *les bases des mathématiques*, j'essaierai une fois de plus d'enfoncer des portes qui ne me semblent pas toutes ouvertes. Mais qui sait !

Soyons clair : je n'ai pas de solution à proposer mais j'ai mille et une pistes à explorer qui toutes reposent sur des transferts entre multiples représentations, codages, interprétations permettant de **"comprendre"** le phénomène avant de trouver un **"langage"** permettant de **"démontrer"** (car, en mathématiques comme ailleurs, tout repose sur des moyens

[1] antoine-marceldumont24@orange.fr

d'expression). Diverses annexes ci-jointes vont permettre de se familiariser avec d'autres visions.

A - COMPRENDRE SUR UN EXEMPLE POURQUOI LE CHOIX D'UN CODAGE PLUTÔT QU'UN AUTRE PEUT BLOQUER OU DÉBLOQUER LA COMPRÉHENSION.

(cf. Annexe 1 : Test de parité des coefficients binomiaux)

Il semble que les polynômes binomiaux jouent un rôle majeur dans les structures multiples d'un entier, en particulier la parité des coefficients intervient pour déterminer l'opérateur "tripler" ou "diviser par 2".

1.

Comment j'ai trouvé ce test d'une simplicité extraordinaire :

Tout d'abord l'algorithme de passage d'un polynôme binomial à un autre par décalage d'un cran (cf. Annexe 2 : "Hypercubes et polynômes binomiaux") permet de comprendre la construction de la grille par carrés successifs de 0 et de carrés adjacents identiques au carré précédent Une démonstration formelle nécessiterait un langage adapté et serait ennuyeuse puisque les "causes relationnelles" sont évidentes.

Le problème est donc de caractériser la position d'un coefficient : quand est-il dans un carré de 0, c.à.d. pair?

Rappel : si on interprète les coefficients comme nombre de chemins sur un réseau à 2 dimensions, le codage naturel est de donner leurs coordonnées m et n . Dans ce codage c(m,n) représente donc dans le code usuel C_{n+m}^{n} et dans le code bourbakiste $\binom{n+m}{n}$ (qui n'a rien apporté !).

Les carrés de 0 ayant tous des côtés de longueur une puissance de 2, il est naturel de coder m et n en base 2 et nous parlerons du mot binaire m ou n . nous appellerons carrés principaux ceux qui sont situés sur la diagonale de la grille..

Pour que c(m,n) soit dans un carré principal il faut et il suffit que les mots m et n aient même longueur.

Mais il existe d'autres carrés de 0 situés dans les carrés adjacents au carré principal.

Si n est plus court que m alors on utilise le plus grand sous mot m' de m et on compare m' et n ; si m' et n ont même longueur alors c(m,n) est dans un carré de 0 secondaire. et ainsi de suite jusqu'au sous-mots de longueur 1.

Exemples : les mots sont écrits dans le sens croissant des puissances de 2 (cohérence avec notre écriture)

m = 1011 (13) 100101 (41) m'= 1001 m=110101 (43) m'= 1101

n = 0101 (10) 0111 (14) n = 0111 n =00101 (20) n'= 001

c(13,10) pair c(41,14) pair c(43,20) est impair

Exercice : s'entrainer à repérer la position de c(m,n) en fonction des mots m et n, en particulier le rapport entre les largeurs de bande et les sous-mots constitués de 0 consécutifs.

Bref, une telle familiarisation fait surgir le rapprochement entre la longueur des mots et sous mots et le poids des bits 1, c.à.d. leur position dans le mot, c.à.d. la puissance de 2 correspondante.

D'où le test **: pour que c(m,n) soit pair, il faut et il suffit que les mots m et n aient un bit 1 de même poids**

2.

Imaginons maintenant qu'on caractérise les coefficients par les 2 paramètres usuels, m+n et n :

1er problème : comment caractériser sur les mots m+n et n la condition m et n ont un bit 1 à la même position?

C'est possible mais non évident : c'est un problème technique.

2ème problème beaucoup plus difficile : comment caractériser la position du coefficient par rapport aux carrés de 0 en n'utilisant que les mots binaires m+n et n ? : ici c'est plus un problème d'interprétation qu'un problème de technique.

Nous avons ici un exemple soulignant l'importance de faire des choix entre les codages, représentations et interprétations donc de rechercher les liens faciles ou difficiles entre eux.

Conséquence : **sortir les mathématiques scolaires de leur ornière séquentielle, de leur monolithisme. et surtout de l'unicité des codages et interprétations.**

Réaction classique : "On a déjà tellement de mal à donner du sens"...

Réponse : "**du**" sens signifie "**un seul sens**". C'est justement parce qu'il n'y a plus de liberté de choix que le sens unique perd son intérêt. Il ne reste que la manipulation d'écritures dont on a oublié le **sens unique** ! (La mémoire humaine fonctionne de façon relationnelle beaucoup mieux que de façon séquentielle).

B.- RETOUR A SYRACUSE

Faute de place, je préfère suggérer en annexes quelques représentations et codages pour montrer combien la visualisation de compositions et décompositions numériques devient un jeu combinatoire aussi intéressant que la géométrie traditionnelle (cf. Annexe 3 "représentation Bilog"). Il suffirait de peu de choses pour en faire une véritable théorie. Ce jeu visuel pourrait être, ainsi un lieu d'apprentissage des démonstrations, tout en laissant place à l'imagination, comme en géométrie. Mais en même temps, on retrouve l'attitude scientifique : expérimenter, observer, comparer, classer les expériences, etc. avant de se lancer dans la création d'une théorie permettant des démonstrations.

Actuellement nous sommes prisonniers d'une vision linéaire des entiers avec une loi de succession, et son inverse, une loi de précession : tout entier a un successeur et un "précesseur". Le problème de Syracuse, sans doute comme beaucoup d'autres, nécessitera des visions fractales et des procédures récursives qui ne nous sont pas familières (cf. annexe 4 "partition du Crabe en base 2") ; on peut aussi construire une partition de N codé en base 3, toujours avec l'algorithme récursif du crabe, la classe importante étant celle des non-multiples de 3, classe partagée en sous-classes de mots classés selon leur structure ternaire soit sur un réseau à mailles triangulaires, soit à mailles carrées, etc., etc.).

Dans toutes ces représentations, ces codages, il faut observer l'effet des opérateurs de Syracuse en évitant les cuisines improvisées, c.à.d. en recherchant des structures semblables qui permettent une récursivité sinon totale, au moins partielle.

Exemple : une somme de puissances consécutives de 2 à partir de 1 (cas le plus défavorable) finit par devenir une somme de puissances consécutives de 3. Si un sous-mot très éloigné existe, sa structure binaire est translatée, à l'aide des opérateurs $x^{\wedge 3}$ et /2 : elle reste invariante.

De même 1 + 2^(2p) devient 1 + 3^(p)

Toute somme de puissances consécutives de 4 (cas le plus favorable) tend vers 1 tant que le processus n'est pas perturbé par l'arrivée d'un sous-mot qui change la parité, etc., etc.

D'où l'étude des puissances de 3 et des sommes de puissances de 3 ou encore de 9.

Il semble d'ailleurs que la structure binaire des exposants soit aussi en cause.

Par ailleurs la longueur des suites de 0 dans le mot binaire jouant un rôle important, on peut utiliser le code CLE et passer au code différentiel (différences finies sur la suite des exposants). (cf. Annexe 5 "puissances de 3").

Un algorithme général semble sous-jacent à un grand nombre d'algorithmes, en particulier ceux du cumul (cf. Annexe 6 "rectangle chinois") et ceux du crabe.

Grosso modo : pour construire le terme suivant d'une suite, on cumule tout ce que l'on vient d'écrire depuis le début, avec éventuellement une répétition, et peut être une modification, puis on ajoute un nouvel objet construit à l'aide d'une autre règle, et on recommence.....

Certains pensent que Syracuse est indécidable .Il me semble que l'indécidabilité est liée à un contexte fermé.

Si on l'ouvre, alors le rêve est permis.

Puisse ce problème permettre aux plus jeunes de se poser beaucoup d'autres problèmes et au moins jeunes de repenser les connaissances dites de base (ex : la combinatoire) !

Quelques relectures :

Fiches pédagogiques "École Libératrice" 1975-76, 1976-77.

Actes CIEAEM 38 Southampton "Pour une révolution des mathématiques enseignées" 1986

Sans Tambour ni Trompette n°8 IREM-APMEP Lyon "Un espace sans bord : celui des habitudes" 1992

Actes CIEAEM 46 Toulouse "Sur la nécessité d'une diversification..." 1994

"La Mémoire des Nombres" : "une vision fantastique des entiers" IREM Caen 1994

ANNEXE 1 : TEST DE PARITÉ DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0				
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0			etc.	
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0				
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0				
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0		etc.		
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0						
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0										
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0										
1	1	0	0	1	1	0	0		etc.				etc.						
1	0	0	0	1	0	0	0												
1	1	1	1	0															
1	0	1	0	0							etc.								
1	1	0																	
1	0																		
1																			

Test de parité :

Soit m et n les coordonnées du nœud du réseau correspondant au coefficient ; si les développements binaires de m et n ont un bit 1 situé à la même position, alors c(m,n) est pair ; il est impair dans le cas contraire (ce qui revient à dire que c(m,n) appartient à un carré de zéros).

ATTENTION à la récursivité ! On passe d'un carré initial C_n de côté 2^n au carré initial C_{n+1} de côté 2^(n+1) en translatant C_n à droite de 2^n pas, puis vers le bas de 2^n pas, et on complète par un carré de zéros (la structure binaire de m et n permet de savoir à quel carré de zéros c(m,n) appartient ou n'appartient pas).

ANNEXE 2 : HYPERCUBES ET POLYNÔMES BINOMIAUX

Rappel : si on imagine un arbre exponentiel base 2, inversé, c.à.d. racine en haut, l'ensemble des nœuds à un niveau donné constitue les sommets d'un hypercube ; par exemple les 8 sommets de H3 (pavé à 3 dimensions).

Pour passer au niveau suivant, on projette H3 avec les branches de gauche puis de droite. On obtient ainsi H4 constitué de deux H3 décalés l'un par rapport à l'autre.

Si l'arbre est commutatif, il se transforme en réseau à 2 dimensions. Chaque diagonale représente un hypercube aplati dont les sommets correspondants se superposent, d'où la construction récursive des hypercubes et du même coup celle des polynômes binomiaux.

Ci-dessous H5 et le polynôme binomial associé. Pour mieux voir, tracer les arêtes parallèles.

1	1				
	1	1			
	1	1			
		1	1		
	1	1			
		1	1		
		1	1		
			1	1	
	1	1			
		1	1		
		1	1		
			1	1	
		1	1		
			1	1	
			1	1	
				1	1
1	5	10	10	5	1

Pour construire H6, il suffit de reconstruire un autre H5 en le décalant d'un cran.

La réunion des deux constitue un H6 ; idem pour le polynôme associé :

1	5	10	10	5	1	
+	1	5	10	10	5	1
1	6	15	20	15	6	1

Remarques :

On fait une opération vectorielle, c.à.d. colonne par colonne

On décale éventuellement les listes

On concatène les listes c.à.d. qu'on les juxtapose, etc., tout ceci pouvant avoir multiples interprétations.

Exemple : pour un mot binaire, le décaler d'un cran c'est le multiplier ou le diviser par 2.

Conclusion : 13 = 1011 ; 2x13 = 01011 ; 3x13 = 111001.

Multiplier par 3, c'est donc réunir le mot et son double (avec retenues éventuelles).

Pour la parité des coefficients binomiaux on calcule modulo 2, mais avec retenue. La construction récursive des polynômes binomiaux nous donne donc la parité des coefficients du polynôme suivant.

Pour H4 :

1	4	6	4	1	
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

(la ligne du bas correspond à H5).

En parité :

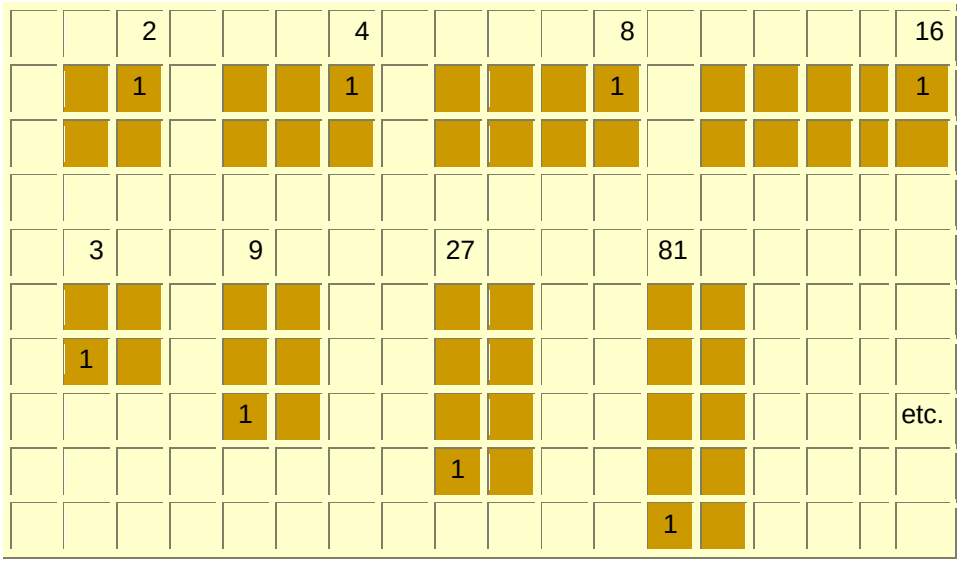
1	0	0	0	1	
	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1

Problème : prolonger de telles récursivités aux coefficients trinomiaux, tétranomiaux, etc. avec des visions spatiales commodes !

ANNEXE 3 : REPRÉSENTATIONS BILOG (exposants des puissances de 2 et de 3)

Axe horizontal : puissances de 2, sens croissant de gauche à droite

Axe vertical : puissances de 3, sens croissant de haut en bas.



.../...

Utilisation des polynômes binomiaux :

		3	=	1+2						4	=		1+3		
				1	1					1			1		
1													1		
			=								=				
3^2	=	9	=	1+2x2+1x4					4^2	=	16	=	1+2x3+1x9		
				1	2	1						1		1	
														2	
1			=										=	1	
3^3	=	27	=	1+3x2+3x4+1x8					4^3	=	64	=	1+3x3+3x9+1x27		
				1	3	3	1					1		1	
														3	
			=										=	3	
1														1	
	81		=	1+4x2+6x4+4x8+1x16											
				1	4	6	4	1			etc.				
			=												
1															

Chaque case représente ainsi un binôme : produit d'une puissance de 2 par une puissance de 3 ; il suffit d'indiquer la case origine

Les diverses structures d'un entier se visualisent et permettent des décompositions rapides.

Ces structures ne sont pas modifiées par des translations c.à.d. par des multiplications ou divisions par des puissances de 2 ou de 3.

Tout entier peut être représenté par divers sous-ensemble de cases, pouvant être affectées de coefficients autres que 1.

Problème : représenter par exemple les puissances de 5, de 7 sur le quadrillage ; étudier le produit d'une somme par une somme, etc.

ANNEXE 4 : PARTITION DU CRABE, en base 2, de N

Rappel : L'algorithme du Crabe permet de parcourir sur l'arbre exponentiel de base 2 tous les naturels en commençant par le côté, d'où son nom. L'arbre étant commutatif devient un réseau: sur ce réseau l'algorithme donne une partition de N en classes isomorphes: la plus importante est la classe des impairs ; les autres ne sont que les produits par les puissances successives de 2.

La classe des impairs est elle même partagée en classes d'équivalence: deux mots binaires sont équivalents s'ils contiennent le même nombre de bits 1 d'où le tableau ci-dessous (le poids des bits est croissant de gauche à droite)

La construction récursive des colonnes provient évidemment de la construction récursive des hypercubes sous-jacents. On obtient ainsi une vision globale des structures binaires de tous les naturels.

1	11				
	101	111			
	1001	1101			
		1011	1111		
	10001	11001			
		10101	11101		
		10011	11011		
			10111	11111	
	100001	110001			
		101001	111001		
		100101	110101		
			101101	111101	
		100011	110011		
			101011	111011	
			100111	110111	
				101111	111111
	etc.	etc.			

.../...

ou, en code usuel :

1	3				
	5	7			
	9	11			
		13	15		
	17	19			
		21	23		
		25	27		
			29	31	
	33	35			
		37	39		
		41	43		
			45	47	
		49	51		
			53	55	
			57	59	
				61	63
	etc.	etc.			

Problème : étudier l'effet des opérateurs de Syracuse sur les mots binaires et les changements de classe.

ANNEXE 5 : PUISSANCES DE 3 EN CODE CLE

Rappel : en code CLE, tout entier, développé en Binaire, s'écrit sous forme de la liste des exposants des puissances de 2.

Exemple : 13 s'écrit (0,2,3) ; 65539 s'écrit (0,1,16) ; avec une loi de réduction : (5)+(5)=(6) très commode.

Problème : étudier les opérations sur ce code.

Dans le tableau ci-dessous, les cases en jaune sont en ‘code CLE’, les autres en ‘code usuel’.

1	=	0						hypercube de dimension 0								:		point
		1																
3	=	0	1					hypercube de dimension 1								:		segment
		1	2															
9	=	0	1		etc.			hypercube de dimension 2								:		parallélogramme
			1	2														
		1	2x2	1x4														
27	=	0	1					hypercube de dimension 3								:		pavé
			1	2														
			1	2														
				2	3													
		1	3x2	3x4	1x8													
81	=	0	1					hypercube de dimension 4								:		pavé à 4 dimensions
			1	2														
			1	2					Représentation BILOG :									
				2	3						1	4	6	4	1			
			1	2						=								
				2	3													
				2	3													
					3	4		1										
		1	4x2	6x4	4x8	1x16												
etc																		

.../...

Somme des puissances de 3, c'est à dire somme des hypercubes

	5	10x2	10x4	5x8	1x16													
c.à.d. polynôme binomial tronqué							1			5	10	10	5	1				
							1		=									
							1											
							1											
							1											

Puissances de 3 et algorithme du Crabe :

1		0																
3		0	1															
9		0	1	1	2													
27		0	1	1	2	1	2	2	3									
81		0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	

Suite des différences successives :

		1	0	1	-1	1	0	1	-2	1	0	1	-1	1	0	1		

on retrouve l'algorithme du CRABE appliqué à l'arbre exponentiel base 2 et ses symétries d'ordre 2

Remarques:

Cette analyse à l'aide des hypercubes c.à.d. des polynômes binomiaux peut s'appliquer chaque fois qu'on a une somme de 2 termes, par exemple 9=1+8, ou 4=1+3, ou 5=2+3, ou encore 7=4+3, etc.

D'où les représentations BILOG :

		64				81									5					25				etc
	1				1			2			1					1						1			
	3														1					2				
	3																		1					
	1																							

Cette analyse peut encore s'appliquer aux différences telles que 3 = 4 - 1 en utilisant des polynômes binomiaux alternés : par exemple 3^3 c.à.d. 27 peut s'écrire [-1,3,-3,1] en base 4, c.à.d. -1 + 12 - 48 + 64

et les sommes alternées redonnent les polynômes binomiaux tronqués

La représentation en BILOG permet des décompositions beaucoup plus rapidement que si on utilisait le formalisme usuel avec des sigma de sigma de sigma etc.

ANNEXE 6 : RECTANGLES CHINOIS

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66			
1	4	10	20	35	56	84	120	165	120				
1	5	15	35	70	126	210	330	495				1	
1	6	21	56	126	252	462	792				7	1	
1	7	28	84	210	462	924				21	6	1	
1	8	36	120	330	792				35	15	5	1	n-4
1	9	45	165	495				35	20	10	4	1	n-3
1	10	55	220				21	15	10	6	3	1	n-2
1	11	66				7	6	5	4	3	2	1	n-1
1	12				1	1	1	1	1	1	1	1	n
1							m-6	m-5	m-3	m-2	m-1	m	

Les polynômes binomiaux sont les diagonales du rectangle.

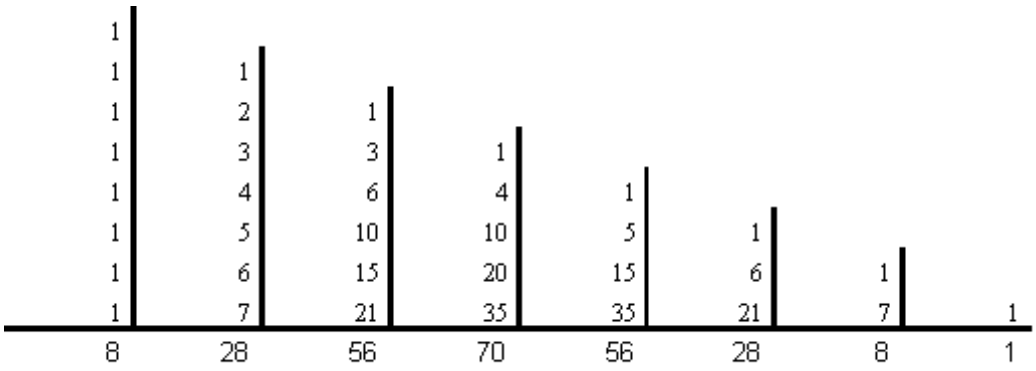
Chaque terme est le cumul de tous les termes de la ligne au-dessus

ex: 126 = 1+4+10+20+35+56 . C'est la vision globale de la vision locale classique correspondant à la formule : c(m,n) = c(m-1,n) + c(m,n-1)

De la même façon, le cumul, ci-dessous, des polynômes binomiaux est le polynôme binomial d'ordre supérieur mais tronqué de son premier élément, vision globale d'une vision locale récursive qu'on pourrait coder :

PB(4)+ PBT(1;4) = PBT(1;5) (1 signifiant 1er terme supprimé)

ex : 1 , 4 , 6 , 4 , 1

<u>+ 4 , 6 , 4 , 1</u>

5 10 10 5 1 etc. pour d'autres types de troncatures !