

Du collège à la Seconde : quelle culture mathématique ?

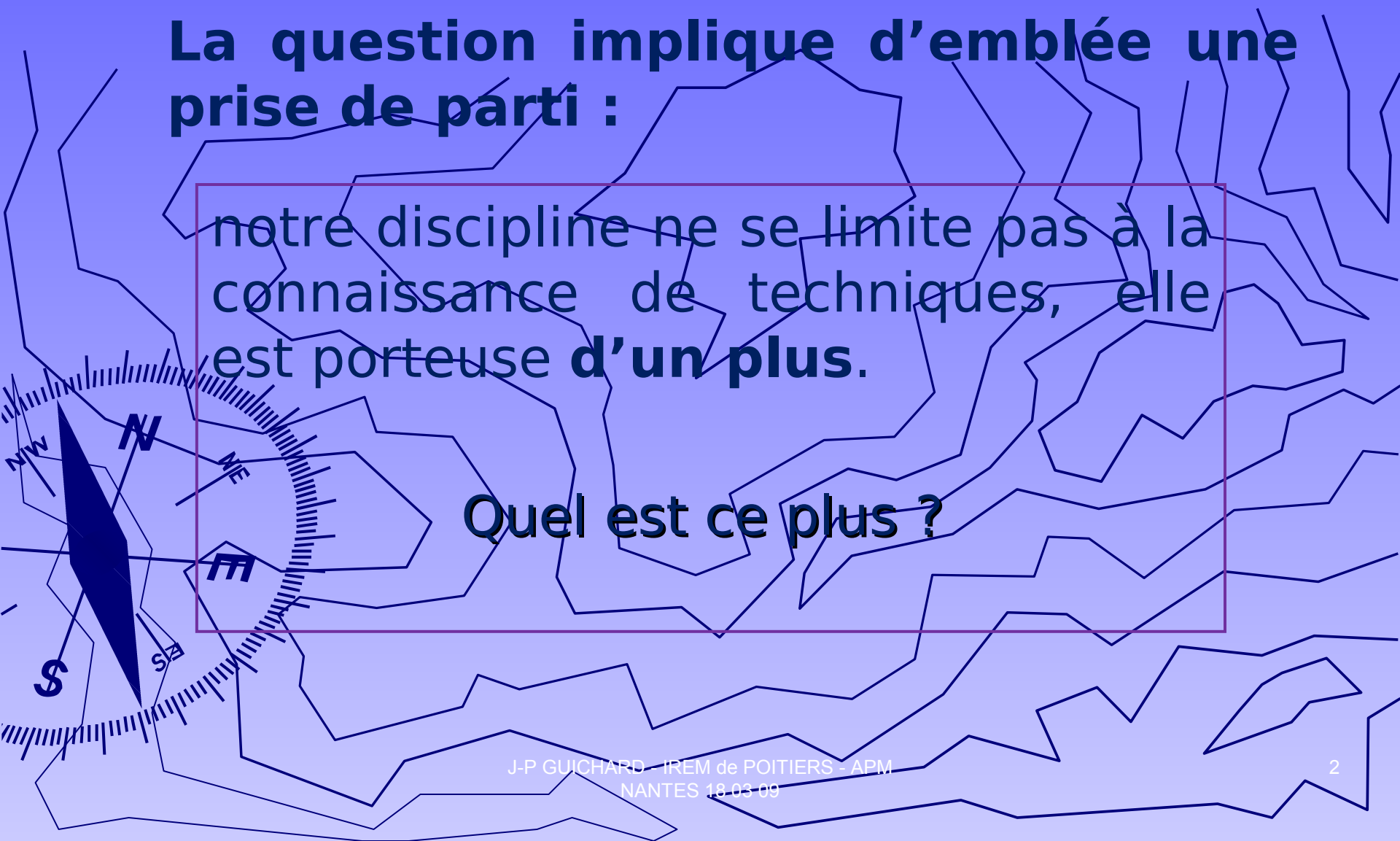


Quelle culture mathématique... ?

La question implique d'emblée une prise de parti :

notre discipline ne se limite pas à la connaissance de techniques, elle est porteuse **d'un plus.**

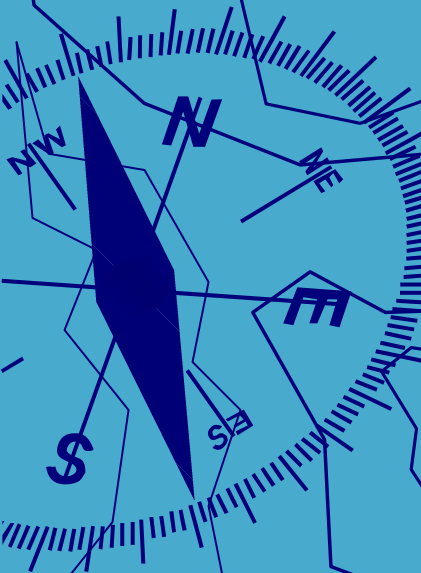
Quel est ce plus ?



Du Collège à la Seconde : quelle culture mathématique ?

- ▶ Une question cruciale
- ▶ Les grandes questions
- ▶ Un enseignement revisité
- ▶ Le retour aux *Lumières*

I. Une question cruciale pour notre enseignement



I.1.a. La présentation des programmes

Une myriade de connaissances et de capacités

Connaissances	Capacités	Exemples d'activité, commentaires	Commentaires spécifiques pour le socle
<p>Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle. Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.</p>			
Ordre	<ul style="list-style-type: none">- Comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres.- Encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres.- Placer un nombre sur une demi-droite graduée.- Lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement.	<p>- l'expression de mesures, une unité étant choisie : 23,042 m, c'est 23 mètres plus 4 centièmes de mètre (4 cm) et 2 millièmes de mètre (2 mm) ou 23 mètres plus 42 millièmes de mètre (42 mm), ce qui permet d'écrire :</p> $23,042 \text{ m} = 23 \text{ m} + 4 \text{ cm} + 2 \text{ mm} = 23 \text{ m} + 42 \text{ mm}.$ <p>Les erreurs relatives à l'ordre sur les décimaux proviennent le plus souvent d'une interprétation erronée des écritures à virgule. Les règles utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres doivent donc être justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales. Le placement sur une demi-droite graduée est pour cela un bon support d'activités.</p>	<p>La bonne compréhension s'appuie sur le sens et non sur des procédures. Par exemple pour comparer 2,8 et 2,21 on peut mettre en évidence que :</p> <ul style="list-style-type: none">• 2,8 c'est 2 et 80 centièmes et 2,21 c'est 2 et 21 centièmesou que :• 2,8 c'est 280 centièmes et 2,21 c'est 221 centièmes.

I.1.b. La présentation des programmes

Quelques grands domaines

Collège

- Organisation et gestion de données, fonctions
- Nombres et Calculs
- Géométrie
- Grandeurs et mesures

Seconde

- Statistiques,
- Calcul et fonctions,
- Géométrie

I.2. Les raisons d'être des mathématiques

- **Des techniques sans raison d'être :**
 - ajouter des fractions
 - développer, factoriser
 - rendre rationnel un dénominateur
 - étudier des figures
 - calculer une longueur, un angle...
- **Savoir d'où viennent et à quoi servent ces techniques, et pourquoi les hommes les ont inventées permet de comprendre ce que sont les mathématiques, c'est accéder à une culture mathématique.**

I.3. Des questions et des réponses progressives

- Recontextualiser les techniques dans l'étude des problèmes dont s'occupent les mathématiques

D'où

- Quelles sont les questions dont s'occupent les mathématiques ?
- quels sont les outils qu'elles ont élaborés pour y répondre ?

« Il n'y a pas des problèmes qu'on se pose, il y a des problèmes qui se posent. Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus. » H. Poincaré

I.4. Comment trouver ces questions ?

- **Revenir aux sources du savoir : histoire des maths**
- **Chercher où vivent les mathématiques dans notre société**

D'où, **se cultiver** :

- **en participant à des groupes APM ou IREM,**
- **en se documentant : CultureMath, Images des mathématiques...**

*

- **Quels sont les enjeux des grands domaines des mathématiques ?**

Quelle culture mathématique ?

I. Une question cruciale

→ II. Les grandes questions



II.1.a. Les grands domaines des mathématiques

- Arithmétique
- Géométrie
- Algèbre
- Analyse
- Statistiques et probabilités

Collège

- Organisation et gestion de données, fonctions
- Nombres et Calculs
- Géométrie
- Grandeurs et mesures

Seconde

- Statistiques,
- Calcul et fonctions,
- Géométrie

II.1.b. Les grands domaines des mathématiques

► La classification de Bossut, 1784 (1)

« Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc. Elles se divisent en mathématiques pures et en mathématiques mixtes.

- Les mathématiques pures considèrent la grandeur d'une manière simple, générale et abstraite ... Elles comprennent :

1°) L'arithmétique ou l'art de compter

2°) La géométrie qui apprend à mesurer l'étendue

3°) L'analyse, science des grandeurs en général

4°) La géométrie mixte, combinaison de la géométrie ordinaire et de l'analyse

II.1.b. Les grands domaines des mathématiques

► La classification de Bossut, 1784 (2)

- Les mathématiques mixtes empruntent de la physique ...

1°) **La mécanique**, science de l'équilibre et du mouvement des corps solides

2°) **L'hydrodynamique** qui considère l'équilibre et le mouvement des corps liquides

3°) **L'acoustique** ou la théorie des sons

4°) **L'optique** ou la théorie des mouvements de la lumière

5°) **L'astronomie**, science du mouvement des corps célestes. »

II.2. a. Arithmétique. Définitions (1)

Encyclopédie Méthodique, Bossut, 1734

« C'est l'art de dénombrer, ou cette partie des Mathématiques qui considère les propriétés des nombres. On y apprend à calculer exactement, facilement, promptement. L'*arithmétique* est la base de toutes les Sciences mathématiques, car les rapports de toutes les espèces de quantités se réduisent finalement en nombres. Quelques auteurs définissent l'*Arithmétique* la Science de la quantité discrète. »

II.2. a. Arithmétique. Définitions (2)

Bézout, 1739

« On appelle en général, quantité, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres. L'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle calculer. »

II.2.b. Arithmétique: ses origines

- ▶ **Besoins sociaux** : échanges, partages, commerce, évaluation des biens, impôts, héritages, salaires, calendrier...
- ▶ **Besoins toujours actuels**

II.2.c. Arithmétique: les grandes questions

- **Comment dénombrer ?** (un troupeau, une récolte...)
- **Comment calculer ?** (un prix, une durée, un nombre d'ouvriers...)
- **Comment comparer ?** (des masses, des prix, ... : problèmes de conversions, de comparaison absolue et relative ...)
- **Comment partager ?** (des richesses, des biens, des ressources, des productions...)

II.2.d. Arithmétique : les réponses...

- Les réponses à ces questions ont amené à **élaborer des notions et des techniques** et à les améliorer : bases de numération, techniques de calcul, format des nombres, système métrique ...
- Les questions sont **toujours actuelles** : l'arithmétique est toujours très présente dans notre vie sociale.

II.3. a. Géométrie : définitions

- Mesurer

« L'objet principal de la géométrie est de mesurer les différentes espèces d'étendues que l'esprit considère. »

Montucla. *Histoire des Mathématiques*, 1758

- Construire

« Dès qu'on a fait de la géométrie, comme on tendait vers des buts concrets, on a effectué des constructions ... »

Lebesgue. *La mesure des grandeurs*, 1935

II.3.b. Géométrie : origine

« Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort. » Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, 1935)

- Arpentage : bornage, partage des terrains, travaux publics (routes, canaux, déblais, remblais...)
- Construction d'édifices, de décors...
- Besoins de l'astronomie, cartographie, géographie, navigation, fortification...

II.3.c. Géométrie : Les grandes questions

- Comment mesurer une grandeur ? (longueur, aire, volume, angle)
- Comment mesurer des grandeurs inaccessibles ? (distances...)
- Comment construire ? (une figure, un solide... ayant des caractéristiques données, avec des instruments donnés)
- Comment se repérer ? (à la surface de la Terre, sur mer, par rapport au Ciel)
- Comment représenter l'espace sur un plan ? (perspective, peinture, écran)

II.3.d. Géométrie : : les réponses... (1)

- Les réponses à ces questions ont amené à élaborer tout un corpus de notions, techniques et instruments : angle, parallèles, tangente, symétries, cercles, triangles, polygones, polyèdres, corps ronds, constructions, lieux, triangles isométriques, figures semblables..., compas, astrolabe ...
- Questions toujours actuelles, et qui se renouvellent : GPS, images numériques...

II.3.d. Géométrie : les réponses... (2)

Clairaut : Elemens de Géométrie, 1741

PREMIERE PARTIE (pages 1 à 72)

Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

DEUXIEME PARTIE (pages 73 à 102)

De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.

TROISIEME PARTIE (pages 103 à 144)

De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

QUATRIEME PARTIE (pages 145 à 215)

De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

II.4.a. Algèbre : définition

« Science du calcul des grandeurs considérées généralement. On a choisi pour représenter les grandeurs ou les quantités les lettres de l'alphabet comme étant d'un usage plus facile et plus commode qu'aucun autre signe.

L'algèbre a deux parties :

La méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet,

La manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes (partie la plus étendue et la principale). »

Encyclopédie Méthodique, D'Alembert, 1734

II.4.b. Algèbre : origines

- **Algèbre numérique** : résolution de problèmes par mise en équation, puis résolution des équations.
- **Algèbre littérale** : outil pour résoudre tous les problèmes.

Nullum non problema solvere

« L'Art analytique s'attribue justement le magnifique problème des problèmes qui est : résoudre tout problème. » Viète. *Introduction à l'Art analytique*, 1591

II.4.c. Algèbre : les grandes questions

- Comment résoudre un problème à l'aide d'équations ?
- Comment exprimer des relations entre grandeurs ? (formules générales, équations de courbes, équations différentielles...)
- Comment calculer sur les grandeurs ?

II.4.d. Algèbre : les réponses (1)

Les réponses à ces questions ont fait de l'algèbre **le langage universel de la science.**

Elle a remplacé en ce sens la Géométrie.

II.4.d. Algèbre : les réponses (2)

Clairaut. *Elemens d'Algèbre*, 1768, 4^o éd.

– « Je me suis proposé de suivre dans cet ouvrage la même méthode que dans mes *Elemens de Géométrie*. J'ai tâché d'y donner les règles de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pu suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous forme de théorème. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre. »

– « Parmi les différents Problèmes dont les premiers Mathématiciens qui ont noms d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algèbre ou Analyse ; » <Partager une somme, par exemple 890 à trois personnes, en sorte que la première...>

II.5.a. Analyse : définition

« ANALYSE est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations. L'*analyse*, pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'Algèbre, ou le calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots, *analyse*, *algèbre*, sont souvent regardés comme synonymes. /.../

L'*analyse* est divisée, par rapport à son objet, en *analyse des quantités finies*, et *analyse des quantités infinies*.

Analyse des quantités finies, est ce que nous appelons autrement *Arithmétique Spécieuse* ou *Algèbre*.

Analyse des quantités infinies ou *des infinis*, appelée aussi *la nouvelle Analyse* ...

Encyclopédie Méthodique, D'Alembert, 1734

II.5.b. Analyse : origine

- **Méthodes infinitésimales** pour le calcul des longueurs de courbes, aires, volumes, centres de gravité.
- **Étude des mouvements et trajectoires** (astronomie, mécanique, optique, physique...)
- **Recherche de lois inconnues** (problèmes de mécanique et de physique)

II.5.c. Analyse : les grandes questions

- Comment étudier les variations d'une grandeur ?
- Comment comparer des grandeurs variables ?
- Comment construire une courbe (trajectoire...) ?
- Comment résoudre un problème d'optimisation ?
- Comment trouver une courbe astreinte à des conditions (trajectoire, ... : calcul différentiel) ?
- Comment mesurer des grandeurs liées à des courbes ? (longueur, aire, volume, ... : calcul intégral).

II.5.d. Analyse : les réponses

► Les réponses à ces questions ont amené à **élaborer tout un corpus de notions, méthodes, techniques** : équations, graphiques, fonctions, dérivées, intégrales...

II.6.a. Statistiques et probabilités : définitions

- « La Géométrie du hasard » Pascal, 1654
- « Qu'y a-t-il de commun entre la **statistique**, ensemble de routines administratives nécessaires pour décrire un état et sa population, et le **calcul des probabilités**, subtile façon d'orienter les choix en cas d'incertitude, imaginée vers 1660 par Huygens et Pascal, et les **estimations de constantes physiques et astronomiques** à partir d'observations empiriques disparates, effectuées vers 1750 ? »

A. Desrosières. *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*, 1993, rééd. 2000

II.6.b. Statistiques et probabilités : origine

– Statistiques :

- Statistique allemande : recueil et organisation de données pour gouverner, gérer l'État
- Arithmétique sociale anglaise : extrapoler à partir de données (population) pour rentes, assurances, ...

– Probabilités :

- Jeux de hasard : jeu équitable, partage équitable
- Contrôle des estimations
- Aide à la décision juste (Condorcet, Laplace, Poisson)
- Théorie des erreurs

II.6.c. Statistiques et probabilités : les grandes questions

- Comment mesurer l'incertain ?
- Comment recueillir et transmettre de l'information ?
- Comment situer un individu dans une population? (« L'homme moyen »)
- Comment estimer une population à partir d'un échantillon ?
- Comment prévoir ?

II.6.d. Statistiques et probabilités : les réponses

- Les réponses à ces questions ont amené à l'utilisation de **tableaux** et de **graphiques**, aux notions de **moyenne**, **médiane**, **fréquence**, **espérance**, **probabilité**, et à leurs calculs.
- « Le chômage, l'inflation, la croissance, la pauvreté, la fécondité ; ces objets et leurs **mesures** statistiques constituent des points d'appui pour **décrire** des situations économiques, **dénoncer** des injustices sociales, justifier des actions politiques. Ils fournissent une **langue stable** et largement acceptée pour exprimer le débat. » A. Desrosières. 1993, 2000.
- « Ce calcul délicat s'étend aux **questions les plus importantes de la vie** qui ne sont, en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilités. » Laplace. 1812

II.7. Bilan. a. Quelques grandes questions

- Comment dénombrer ?
- Comment mesurer ?
- Comment comparer ?
- Comment partager ?
- Comment calculer ?

II.6. Bilan. b. Nature des mathématiques

Questions :

- ▶ enracinées dans la vie sociale (commerce, propriété, navigation, calendrier, astronomie, géographie, mécanique, religion ...)
- ▶ transversales à plusieurs domaines.

D'où :

- ▶ des méthodes et des outils transférables aux différents domaines,
- ▶ la fabrication d'outils et de méthodes généraux.

C'est ainsi que **ce sont constitués des domaines aux objets et méthodes très généraux** : Arithmétique, Algèbre et Analyse (Nombre, équations, fonctions).

Quelle culture mathématique ?

I. Une question cruciale ...

II. Les grandes questions

 III. Un enseignement revisité



III.1. En Sixième

- Organisation de l'année autour de l'étude de 6 grandeurs (angles, durées, aires, prix, volumes, longueurs), thèmes transversaux aux 4 grandes parties du programme, et donc aux différents domaines des mathématiques
- Organisation de l'étude de chaque grandeur autour de quelques grandes questions :
Comment comparer ? Comment mesurer ? Comment calculer ? (qui en entraînent d'autres : comment multiplier, diviser ou partager ... ?)

III.2. En Seconde, organisation de l'année autour de 9 questions :

- 1. Comment construire des figures astreintes à respecter des conditions ? (triangles isométriques, algèbre, démonstration, révisions collège)
- 2. Comment construire à la règle et au compas un segment de longueur donnée ? (triangles semblables, algèbre, ensembles de nombres intervalles)
- 3. Comment situer un individu dans un ensemble ? (statistiques, pourcentages)
- 4. Faut-il croire aux sondages ? (statistiques)
- 5. Comment résoudre un problème d'optimisation ? (fonctions, calculs algébriques)
- 6. Comment modéliser par une fonction ? (fonctions de référence, inéquations)
- 7. Comment déterminer tous les diviseurs d'un nombre ? (arithmétique)
- 8. Comment résoudre un problème de géométrie par le calcul ?
- 9. Comment représenter l'espace ? (géométrie dans l'espace)

III.3. Un exemple en Sixième : les angles (1)

Le chapitre sur les angles : un parcours en 3 moments

- ▶ 1) Comparer des angles
- ▶ 2) Partager des angles
- ▶ 3) Mesurer des angles

III.3. Un exemple en Sixième : les angles (2)

Introduction : les 3 questions

- ▶ 1) Quand parle-t-on d'angle ?
- ▶ 2) Quand utilise-t-on des angles ?
- ▶ 3) Qu'a-t-on besoin de savoir faire avec les angles ?

III.3. Un exemple en Sixième : les angles (3)

Étude 1 : comparer des angles

- ▶ 1) Rugby : angle de tir (*définition, comparaison*)

Cours : 1. Définitions, méthode de comparaison

- ▶ 2) Cerf volant et charpente (*angles égaux, figures symétriques, codage*)

Construction de figures symétriques (*programmes de construction*).

Cours : 1. Angles égaux et symétrie

- ▶ 3) éventail et spirale

Cours : 1. Addition des angles, multiple d'un angle

III.3. Un exemple en Sixième : les angles (4)

Étude 2 : partager des angles

- ▶ 1) Rose des vents (boussole, compas de navigation)
Partager en 2,4,8,12... Rapporteur "binaire".
Équerres et menuiserie : demi-triangle équilatéral, demi-carré
Cours : 2. Bissectrice, axes de symétrie, angles des triangles rectangle isocèle et équilatéral.
- ▶ 2) Le rapporteur
Trisection de l'angle. Partager un cercle en 360.
Cours : 2. Rapporteur
- ▶ 3) Polygones réguliers
A partir du partage du cercle et de 360° (*division, diviseur, quotient exact, approché*)
Cours : 2. partager un angle en n parties

III.3. Un exemple en Sixième : les angles (5)

Étude 3 : mesurer des angles

- ▶ 1) L'aviateur : prendre le cap pour faire le tour de France (*s'orienter*)

Cours : 3. mesurer un angle

- ▶ 2) Largeur d'une baie (*mesurer l'inaccessible*)

Cours : 3. reproduire un angle de mesure donnée

- ▶ 3) Reproduire une figure (à l'échelle)

Constructions de figures, dictées géométriques

- ▶ 4) Les robots : construire un trajet

Quelle culture mathématique ?

I. Une question cruciale ...

II. Les grandes questions

III. Un enseignement revisité

 IV. Le retour aux *Lumières*

IV. Le retour aux *Lumières*

Se centrer sur les finalités des mathématiques permet :

- d'éclairer nos choix d'enseignement
- de délivrer des connaissances :
 - fondamentales : enracinées dans la vie et l'histoire humaines
 - fonctionnelles, i.e. dont on sait à quoi elles servent.

Convergence avec la proposition de Roland Charnay, pour une autre approche :

- orientée vers le savoir,
- qui consisterait, pour définir cette culture mathématique, à chercher les connaissances mathématiques qui ont le plus grand pouvoir applicatif et explicatif pour d'autres connaissances mathématiques et d'autres domaines.

Quelle culture mathématique ? Références

- CHARNAY R. (2006) *Quelle culture mathématique partagée à la fin de la scolarité obligatoire ?* Repères IREM n° 64 (article en ligne)
- CHEVALLARD Y. (2006) *Les mathématiques à l'école.* Bulletin APMEP n° 471, 2007
- DAHAN-DALMEDICO A. et PEIFFER J. (1982) *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Le Seuil, Points Sciences N° 49, 1986.
- DIDEROT et d'ALEMBERT (1784). *ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE - MATHÉMATIQUES.* Par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, À Paris et Leyde 1784. Réédition du Bicentenaire, Paris, ACL-éditions 1987. (Sur Gallica)
- LEBESGUE Henri (1935). « *La mesure des grandeurs* ». Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1 Genève. Rééd. A. Blanchard, Paris 1975.
- CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie de Clairaut*, Paris 1741, chez Lambert et Durand. Rééd J. Gabay, Paris 2006.
- DESROSIÈRES A. (1993) *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique.* Éditions La Découverte/Poche, 2000.