Durée : 4 heures

Baccalauréat C Japon juin 1992

EXERCICE 1 **5 points**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$(\text{E}) : \qquad (1+\mathrm{i}z)^n = (1-\mathrm{i}z)^n$$

n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **a.** Montrer que pour toute solution z de l'équation (E) on a :

$$|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z|.$$

   b. En déduire que si z est une solution de (E), z est un réel.

2. On rappelle que pour tout réel z, il existe un unique réel φ de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \tan\varphi$.

   Exprimer en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ le complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$.

3. **a.** Montrer que z est solution de (E) si et seulement si φ est solution de :

$$(\text{E}') : \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\varphi} = 1 \quad \text{avec } \varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[.$$

   b. On suppose désormais $n = 6$. Résoudre l'équation (E′). En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

Soit Δ une droite variable passant par O ; on appelle A′ et B′ les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur Δ.

Le but de l'exercice est de démontrer que lorsque Δ varie, le cercle de diamètre [A′B′] passe par un point fixe.

1. **a.** Justifier l'existence d'une similitude plane directe S qui transforme O en A et B en O. Pourquoi S n'est-elle pas une translation ?

   b. Déterminer l'angle de S.

   c. Soit Ω le centre de S. Démontrer que Ω appartient aux cercles de diamètres [OA] et [OB]. En déduire que il est le pied de la hauteur du triangle (OAB) issue de O.

2. On appelle D la droite passant par B, orthogonale à .

   a. Déterminer les images par S des droites D et ; en déduire l'image de B' par S.

   b. Déduire de ce qui précède, que le cercle de diamètre [A′B′] passe par un point fixe quand Δ varie.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. **a.** Étudier les variations de f. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

   b. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

2. On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

   a. Résoudre l'équation $e^x - e^{-x} - 2 = 0$ (on pourra poser $X =$

Calculer m ; en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On définit une suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour } n \text{ entier naturel, } u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

   a. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ peut être minoré par m (calculé en 2. b.), puis que $u_n - u_0 \geqslant n.m.$

   b. En déduire la limite de (u_n).

4. Soit a un réel quelconque.

   a. Discuter *graphiquement*, en utilisant le 1., le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

   b. Résoudre, lorsque c'est possible, cette équation.

Partie B

On définit la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

On désigne par Γ la courbe représentative de φ dans le même repère que celui de $(\mathscr{C})$.

1. **a.** Soit x et y deux réels, $x \geqslant 0,\ y \geqslant 1$.
   Montrer que l'égalité $y = f(x)$ équivaut à l'égalité $x = \varphi(y)$.

   b. Soit M de coordonnées $(a\ ;\ b)$ et M' de coordonnées $(b\ ;\ a)$; montrer que M se transforme en M' par la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) d'équation $y = x$.

   c. En déduire que la courbe Γ est symétrique de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (D).

   d. Tracer la courbe Γ.

2. On pose $\alpha = \varphi(2)$ et on note Δ la partie du plan que délimitent d'une part les droites d'équations $y = 0$ et $y = \alpha$, d'autre part la courbe Γ et la droite (D).

   a. Hachurer Δ sur le graphique.

   b. En utilisant la symétrie de la question 1. b., calculer l'aire en cm^2 de Δ.